

A third-order dispersive flow for closed curves into Kähler manifolds

小野寺 栄治 (東北大理 (院))
sa3m09@math.tohoku.ac.jp

本研究では, 閉曲線がみたす 3 階分散型偏微分方程式の初期値問題

$$u_t = a \nabla_x^2 u_x + J_u \nabla_x u_x + b g(u_x, u_x) u_x \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{T} \quad (2)$$

の解の存在を考察する。ここに, $a, b \in \mathbb{R}$ を定数, (N, J, g) をケーラー多様体, $u(t, x)$ は $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ の N -値未知関数, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $u_t = \partial u / \partial t$, $u_x = \partial u / \partial x$, ∇_x は写像 u に沿った x 方向の共変微分を表す。方程式 (1) は, 古典力学に現れる渦糸や古典スピンなどの $\mathbb{S}^2$ -値モデル

• $a = b = 0$: Da Rios (1906), Hasimoto (1972)

• $a \neq 0, b = a/2$: Fukumoto-Miyazaki (1991)

を幾何学的に一般化することにより導出される。 $a = b = 0$ のとき, (1) の解は (1 次元) シュレーディンガー写像とよばれる。

初期値問題 (1)-(2) の解の存在については以下が知られている:

• $a = b = 0$: Koiso (1997), (cf. Sulem-Sulem-Bardos (1986), $N = \mathbb{S}^2$)

(i) 時間局所解の存在

(ii) N : 局所対称空間 ($\nabla R = 0$) $\implies$ 時間大域解の存在

• $a \neq 0, b = a/2$: Tani-Nishiyama (1997), $N = \mathbb{S}^2 \implies$ 時間大域解の存在

本研究では, $a \neq 0$ で N が一般のケーラー多様体の場合に, 時間局所解の存在, 及び, 時間大域的延長可能性と N の曲率や位相との関連を考察したい。

時間局所解の存在については以下の定理が得られた:

定理 1. $m = 2, 3, 4, \dots$ とする.

$$u_0 \in C(\mathbb{T}; N), \quad u_{0x} \in H^m(\mathbb{T}; TN)$$

をみたす任意の u_0 に対して, ある $T = T(N, \|u_{0x}\|_{H^2(\mathbb{T}; TN)}) > 0$ が存在して,

$$u \in C([-T, T] \times \mathbb{T}; N), \quad u_x \in C([-T, T]; H^m(\mathbb{T}; TN))$$

をみたす (1)-(2) の時間局所解 u が唯一つ存在する.

粗く言えば, 定理 1 は「任意の $u_0 \in H^3$ に対して一意可解」ということを主張している。

定理 1 の証明の概略 方程式 (1) は, 空間変数の定義域がコンパクトであるから解の平滑効果は成り立たない. しかしながら, N のケーラー性 $\nabla J = 0$ により $\nabla_x J_u = J_u \nabla_x$ が成り立つこと, 及び, 1 階項 $g(u_x, u_x)u_x$ のある種の構造のよさによって, 方程式 (1) を対称双曲系のように取り扱うことができ, 幾何学的な古典的エネルギー法で解の滑らかさがしたがうということが基本的である.

初期写像の値域の近傍を考えることにより, N がコンパクトである場合に帰着される. Nash の定理により, 等長埋め込み $\omega : N \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在するので, 必要に応じて N を $\omega(N)$ に置き換える. $\omega(u)$ も u と書くことにする. $t > 0$ で示せば十分である.

Step 1. 放物型近似. $\varepsilon > 0$ とする. 4 階放物型近似方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon &= -\varepsilon \nabla_x^3 u_x^\varepsilon + a \nabla_x^2 u_x^\varepsilon + J_u \nabla_x u_x^\varepsilon + bg(u_x^\varepsilon, u_x^\varepsilon)u_x^\varepsilon & \text{in } (0, T_\varepsilon) \times \mathbb{T}, \\ u^\varepsilon(0, x) &= u_0(x) & \text{in } \mathbb{T} \end{aligned}$$

の $\omega(N)$ の管状近傍に値をとる時間局所解 u^ε を構成する. 幾何学的な考察により, ある種の最大値原理がしたがうので, u^ε は $\omega(N)$ -値であることがわかる.

Step 2. コンパクト性. 古典的エネルギー評価を行うことにより, $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ の存在時間と大きさに関する一様評価を得る. コンパクト性の議論により, (1)-(2) の解

$$u \in C([0, T] \times \mathbb{T}; N), \quad u_x \in L^\infty(0, T; H^m(\mathbb{T}; TN)) \cap C([0, T]; H^{m-1}(\mathbb{T}; TN))$$

が得られる.

Step 3. 一意性. 同じ初期値の 2 つの解 u, v の差 $u - v$ に対するエネルギー評価により一意性が示される. $\omega(N)$ の $\mathbb{R}^p$ における法束の基底をうまくとることにより, 差に対する方程式系においても, 低階項が悪影響せずに $u - v$ の古典的 H^1 -エネルギー法が機能する.

Step 4. 時間連続性の回復. 標準的方法による. □

最後に解が時間大域的に延長可能となるための十分条件を一つ紹介する. ケーラー多様体 (N, J, g) が $(C^\infty\text{-多様体として})$ 定曲率空間であるとする. その断面曲率を K とおく. $a \neq 0, b = aK/2$ とする. このとき以下の定理が得られる:

定理 2. $m = 2, 3, 4, \dots$ とする.

$$u_0 \in C(\mathbb{T}; N), \quad u_{0x} \in H^m(\mathbb{T}; TN)$$

をみたす任意の u_0 に対して,

$$u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{T}; N), \quad u_x \in C(\mathbb{R}; H^m(\mathbb{T}; TN))$$

をみたす (1)-(2) の時間大域解 u が唯一つ存在する.

$N = \mathbb{S}^2$ のとき, $K \equiv 1$ であるから, 定理 2 は, Tani-Nishiyama (1997) の仕事に対応する.

定理 2 の証明の要点 $N = \mathbb{S}^2$ の場合に Tani-Nishiyama (1997) が用いた時間保存量を幾何学的に一般化することにより, 適当な時間保存量を構成することができる. 具体的には, 以下の 2 つの積分量

$$\begin{aligned}\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T};TN)}^2 &= \int_{\mathbb{T}} g(u_x(t), u_x(t)) dx, \\ E(u(t)) &= \|\nabla_x^2 u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T};TN)}^2 + \frac{K^2}{8} \int_{\mathbb{T}} (g(u_x(t), u_x(t)))^3 dx \\ &\quad - K \int_{\mathbb{T}} (g(u_x(t), \nabla_x u_x(t)))^2 dx \\ &\quad - \frac{3K}{2} \int_{\mathbb{T}} g(u_x(t), u_x(t)) g(\nabla_x u_x(t), \nabla_x u_x(t)) dx\end{aligned}$$

がそれぞれ変数 t に関して保存される. これにより, u_x の $H^2(\mathbb{T};TN)$ における先験的評価が得られる. □

参考文献

- [1] Da Rios, *On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape[in Italian]*, Rend. Circ. Mat. Palermo **22** (1906), 117–135.
- [2] Y. Fukumoto and T. Miyazaki, *Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity*, J. Fluid Mech. **222** (1991), 369–416.
- [3] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), 477–485.
- [4] N. Koiso, *The vortex filament equation and a semilinear Schrödinger equation in a Hermitian symmetric space*, Osaka J. Math. **34** (1997), 199–214.
- [5] P. Y. Y. Pang, H. Y. Wang and Y. D. Wang, *Schrödinger flow on Hermitian locally symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **10** (2002), 653–681.
- [6] P.-L. Sulem, C. Sulem and C. Bardos, *On the continuous limit for a system of classical spins*, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 431–454.
- [7] A. Tani and T. Nishiyama, *Solvability of equations for motion of a vortex filament with or without axial flow*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997), 509–526.