

磁気粘性流体方程式系のエネルギー有限 な弱解の存在について

小林 孝行（佐賀大・理工）
鈴木 貴（大阪大・基礎工）

Ω を \mathbf{R}^3 における滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ单連結な有界領域とし，圧縮性粘性磁気流体の運動を記述した次の磁気流体方程式系 (MHD) :

$$\begin{aligned}\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, \\ (\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + H \times \nabla \times H + a \nabla \rho^\gamma &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u), \\ H_t + \nabla \times \nabla \times H - \nabla \times (u \times H) &= 0, \\ \nabla \cdot H &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, \quad \nu \times \nabla \times H = 0, \quad \nu \cdot H = 0 &\quad \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ \rho|_{t=0} = \rho_0, \quad (\rho u)|_{t=0} = q_0, \quad H|_{t=0} = H_0 &\quad \text{in } \Omega.\end{aligned}$$

を考える。ここで， ν は単位外法線ベクトル， $\rho = \rho(x, t)$ は流体の密度， $u = (u^1(x, t), u^2(x, t), u^3(x, t))$ は流速， $H = (H^1(x, t), H^2(x, t), H^3(x, t))$ は磁場， $\mu > 0$ と λ は $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$ をみたす粘性係数， $a = e^S$ はエントロピー S によって決まる定数である。

解が滑らかのとき，方程式 (MHD) より質量保存則

$$M = \int_{\Omega} \rho dx$$

が得られ，またエネルギー

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{a}{\gamma - 1} \|\rho\|_{\gamma}^{\gamma} + \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho}u\|_2^2 + \|H\|_2^2 \\ &\quad + \int_0^t (\mu \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla \cdot u\|_2^2 + \|\nabla \times H\|_2^2) ds\end{aligned}$$

は減衰することがわかる。ここで， $P = a\rho^\gamma$ ($\gamma > 1$) は圧力である。
我々は次の結果を得た。

定理 1 $T > 0$ とし $\gamma > \frac{3}{2}$ とする . 初期値 (ρ_0, q_0, H_0) は $\rho_0 = \rho_0(x) \geq 0$, $\rho_0 \in L^\gamma(\Omega)$, $|q_0^i|^2/\rho_0 \in L^1(\Omega)$, $H_0 \in L_\sigma^2(\Omega) = \{H \in L^2(\Omega); \nu \cdot H = 0, \nabla \cdot H = 0\}$, さらに , $\rho_0(x) = 0$ のとき $q_0^i(x) = 0$ を満たすとする . このとき , 次をみたすエネルギー有限な (MHD) の弱解 (ρ, u, H) が存在する :

1. $\rho = \rho(x, t) \geq 0, \rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)), u^i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), H \in L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$.
2. $E = E(t) \in L_{loc}^1(0, T)$.
3. $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0 \quad in \quad \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$.
4. 方程式 $(MHD)_{1,2,3,4}$ は $\mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$ の意味で成り立つ .
5. ρ, u の Ω の外への零拡張は , 方程式 $(MHD)_1$ を $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3 \times (0, T))$ の意味でみたす .
6. 方程式 $(MHD)_1$ は *renormalized solution* の意味で成り立つ . すなわち, 任意の $b \in C^1(\mathbf{R})$, $b'(z) = 0$ ($|z|$: 十分大) に対して , $\mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$ の意味で

$$\frac{d}{dt}b(\rho) + \nabla \cdot (b(\rho)u) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\nabla \cdot u = 0$$

が成り立つ .

参考文献

- [1] B. Ducomet and E. Feireisl, *The Equations of Magnetohydrodynamics: On the Interaction Between Matter and Radiation in the Evolution of Gaseous Stars*, Commun. Math. Phys. **266** (2006) 595-629.
- [2] E. Feireisl, A. Novotný, and H. Petzeltová, *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids*, J. Math. Fluid Dynamics **3** (2001) 358-392.
- [3] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 2, Compressible Models*, Oxford Science Publ., Oxford, 1998.