1 次元反応拡散方程式の線形化固有値問題に対する固有値・固有関数

若狭　徹　(早稲田大/明治大 P.D.)
四ツ谷　晶二　(龍谷大学)

1　問題と背景

本講演では 1 次元単位区間上の反応拡散方程式

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u), & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = a(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{1}$$

に対応する定常問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0 & \text{in } (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

及び (2) の非自明解 $u = u(x)$ に対する線形化固有値問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u(x))\varphi(x) + \mu\varphi(x) = 0 & \text{in } (0,1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

について考える. ここで $\varepsilon > 0$, f は C^2-級であり特に $f(u) = u(1-u^2)$ など双安定型と呼ばれる場合を考察する.

双安定型の反応拡散方程式は相転移現象や数理生態学などに現れ, その解におけるパターンダイナミクスの解明が重要な問題の一つである. これらの問題は 1970 年代以降盛んに研究されており, Chafee-Infante [3] や Brunovský-Fiedler [1] によって定常解構造やその安定性が詳しく調べられている. これらの研究によればパラメータ ε が小さくなるのに伴い, 定数定常解からの非定数定常解の分岐が生じ, また各々の分岐解において遷移層と呼ばれる特定のパターンが形成される. 定常解の安定性は (3) の負の固有値の個数により決定されるが, それは定常解の遷移層の個数に等しいことが知られている. 一方 (1) の解においても時間発展とともに解に遷移層が形成され, ダイナミクスの解明において遷移層の運動を知ることが本質的となる.

特に双安定性が “balanced” と呼ばれる場合, Carr-Pego [2] は (1) の解において互いの遷移層に働く相互作用が非常に弱く遷移層の運動がきわめて遅いことを証明した. この結果は数値実験により解の振る舞いを長時間にわたって追跡することの困難さを示唆しており, (1) の解の時間大域的なダイナミクスは十分に解明されていない. 本講演ではこうした問題の解決への応用を念頭におき, 固有関数の形状をはじめ (3) についてより詳しい情報を得ることを目的とする.

本講演では (2) 及び (3) を用いて “representation equation” と呼ばれる方程式を導き, この方程式の特解を用いて (3) の固有値及び固有関数の厳密な解表示を与える. 特にこの方法を $f(u) = \sin u$ 及び $f(u) = u(1-u^2)$ とした場合に応用し, (3) の全ての固有値及び固有関数の解表示を完全楕円積分などを用いて具体的に与える. さらに得られた解表示を通して ε が十分小さい場合の固有値の漸近公式を導き固有関数の形状を与える. 解表示や固有値の漸近公式を得るためには “characteristic equation” と呼ばれる第 3 種完全楕円積分からなる超越方程式の解析を要する. 講演の終わりにこれらの解析手法を述べる.

2 Representation Equation

ここでは一般の $f \in C^2(\mathbf{R})$ に対して (3) の固有値・固有関数を与える方法を述べる. 以下

$$F(u) := \int_0^u f(s)ds$$

とし, また (2) の非自明解 $u(x)$ に対して $\alpha := u(0),\ \alpha_- := \min_{0\le x\le 1} u(x),\ \alpha_+ := \max_{0\le x\le 1} u(x)$ とおく. さらに区間 $(0,1)$ において u_x の符号が丁度 $n-1$ 回変わるとき ($n \in \mathbf{N}$), $u(x)$ を n モード解と呼ぶ. 単調な解は 1 モード解である.

固有関数の解表示を与えるための基本的なアイデアは変数変換 $u = u(x)$ により独立変数を u とする常微分方程式を導くことにある. すなわち $\varphi(x) = \Phi(u(x))$ なる特別な固有関数が存在すると仮定すると Φ は次の 2 階の representation equation を満たす:

$$2(F(\alpha) - F(u))\Phi_{uu}(u) - f(u)\Phi_u(u) + (f_u(u) + \mu)\Phi(u) = 0, \quad u \in (\alpha_-, \alpha_+) \tag{4}$$

このとき次の命題が従う.

Proposition 2.1. $u(x)$ を (2) の解, また $\Phi \in C^2[\alpha_-, \alpha_+]$ を (4) の解とする. このとき $\Phi(u(x))$ は固有値 μ に対する固有関数となる.

Proposition 2.1 により (4) の解を用いて特別な固有関数が与えられることがわかる. 以下この発想を一般化し, より広いクラスの固有関数の構成法を与える. 一般論より $R(x) = \varphi(x)^2$ はある 3 階の線形常微分方程式を満たす. その方程式に対して変数変換 $u = u(x)$ を行うことで次の 3 階の representation eq. が得られる:

$$2(F(\alpha) - F(u))h_{uuu}(u) - 3f(u)h_{uu}(u) + (3f_u(u) + 4\mu)h_u(u) + 2f_{uu}(u)h(u) = 0 \tag{5}$$

上の方程式の解に対して

$$\rho(\mu) := \frac{h(\alpha;\mu)\big[-f(\alpha)h_u(\alpha;\mu) + 2(f_u(\alpha) + \mu)h(\alpha;\mu)\big]}{2}. \tag{6}$$

とおく. このとき次の命題が成り立つ.

Proposition 2.2. 方程式 (5) が $h(\alpha;\mu) \neq 0$ なる特解 $h(\cdot;\mu) \in C^3[\alpha_-, \alpha_+]$ を持つとする.

(i) $\rho(\mu) = 0$ ならば, $\varphi(x) = \sqrt{|h(u(x);\mu)|}$ は (3) の方程式及び $x = 0$ での境界条件を満たす.

(ii) $\rho(\mu) > 0$ ならば,

$$\varphi(x) = \sqrt{|h(u(x);\mu)|}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{\sqrt{\rho(\mu)}}{|h(u(\xi);\mu)|}d\xi\right)$$

は (3) の方程式及び $x = 0$ での境界条件を満たす.

Proposition 2.2 よりより広いクラスの (3) の固有関数の候補が与えられる. (i) の場合, $\pm\sqrt{h(u)}$ は 2 階の representation eq. の解になっており, 残りの境界条件を直接確認すれば固有関数が得られる. 一方 (ii) の場合, 境界条件は次の characteristic function に関する方程式に帰着される:

$$A(\mu) := \frac{1}{2}\int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{\sqrt{\rho(\mu)}}{\sqrt{2(F(\alpha) - F(s))}|h(s;\mu)|}ds \tag{7}$$

Proposition 2.3. $u(x)$ を (2) の n モード解, φ を Proposition 2.2 (ii) における固有関数の候補とする. とおくとき, このとき μ がある $j \in \mathbf{N}$ に対する *characteristic equation*

$$A(\mu) = \frac{j\pi}{2n}$$

の解であるならば φ は (3) の $(j+1)$ 番目の固有関数である.

以上により (3) の固有関数の解表示を得る方法は以下のようにまとめられる:

(i) 3 階の representation eq. の特解 h を求め, $\rho(\mu)$ を計算する.

(ii) $\rho(\mu) = 0$ となる μ に対して $\pm\sqrt{h(u(x))}$ は特別な固有関数の候補を与える.

(iii) $\rho(\mu) > 0$ となる μ の範囲において characteristic function A を解析し, $A(\mu) = \dfrac{j\pi}{2n}$ の解 μ に対して μ は固有値で, Proposition 2.2 (ii) の φ が固有関数.

Remark 2.1. 3 階の方程式 (5) は $\mu = 0$ において $F(\alpha) - F(u)$ を解に持つことから, $|\mu|$ が十分小さいとき次の形の特解

$$h(u;\mu) = (F(\alpha) - F(u)) + \mu\hat{h}(u;\mu)$$

を持つことが期待される. 一方 $\mu = 0$ は固有値にはならないので特別解の候補を与える μ から除外して考える.

3 Main Results

3.1 $f(u) = \sin u$ の場合

以下 $f(u) = \sin u$ とし, $-\pi \le u(x) \le \pi$ を仮定する. このとき (2) の全ての非自明解は $(\varepsilon_n(k), \pm u_n(x;k))$ の形により与えられることが知られている. ただし $n \in \mathbf{N}, k \in [0,1)$,

$$\varepsilon_n(k) := \frac{1}{2nK(k)}, \quad u_n(x;k) := 2\sin^{-1}\Big[k \cdot \mathrm{sn}\big(K(k)(1+2nx), k\big)\Big]$$

($K(k)$, $\mathrm{sn}(x,k)$ は第 1 種完全楕円積分及び Jacobi の楕円関数) である. このとき $u_n(x;k)$ に対して, $\alpha = \alpha_+ = 2\sin^{-1} k$, $\alpha_- = -2\sin^{-1} k$, さらに

$$\frac{1}{2}(u_n'(x;k))^2 = 2k^2 - 2\sin^2\frac{u_n(x;k)}{2} \tag{8}$$

が成り立つことに注意する.

非自明解 $(\varepsilon_n(k), u_n(x;k))$ に対する線形化問題 (3) は次の形により与えられる:

$$\begin{cases} \varepsilon_n^2(k)\varphi''(x) + \cos u_n(x;k)\varphi(x) + \mu\varphi(x) = 0 & \text{in } (0,1), \\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

以下 $n \in \mathbf{N}$ 及び $k \in (0,1)$ を任意に固定し, (9) の $(j+1)$-番目の固有値及び固有関数を $\mu_j^n(k)$ 及び $\varphi_j^n(x;k)$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ により表す.

問題 (9) に対応する 3 階の representation eq. は次で与えられる:

$$4\Big(k^2 - \sin^2\frac{u}{2}\Big)h_{uuu} - \sin u h_{uu} + (3\cos u + 4\mu)h_u - 2\sin u h = 0, \tag{10}$$

ただし $u \in (-2\sin^{-1} k, 2\sin^{-1} k)$ である. このとき

$$h_1(u,\mu;k) := k^2 - \sin^2\frac{u}{2} - \mu,$$

が (10) の特解であることがわかり, 対応する $\rho = \rho_1(\mu,k)$, $A = A_1(\mu,k)$ は次で与えられる:

$$\rho_1(\mu,k) := \mu(\mu-k^2)(\mu-k^2+1),$$

$$A_1(\mu,k) := \int_0^{2\sin^{-1}k} \frac{\sqrt{\rho_1(\mu,k)}}{2\sqrt{k^2-\sin^2\frac{u}{2}}\cdot|h_1(u,\mu;k)|}du = \sqrt{\frac{\mu(\mu-k^2+1)}{\mu-k^2}}\Pi\left(\frac{k^2}{\mu-k^2},k\right),$$

(ただし $\Pi(\nu,k)$ はパラメータ ν, 母数 k の第 3 種完全楕円積分) とおく. 関数 A_1 については次の補題を証明することができる.

Lemma 3.1. $0 < p < \pi/2$ 又は $\pi/2 < p$ とする. μ に関する超越方程式 $A_1(\mu,k) = p$ は任意の $k \in [0,1)$ に対して一意の解 $\mu_1(k,p)$ を持ち, さらに $\lim_{k\to 1-0}\mu_1(k,p) = 0$ $(0 < p < \pi/2)$, 1 $(\pi/2 < p)$ が成り立つ.

これらより固有関数の解表示が得られる. まず $\rho_1(\mu,k) = 0$ の場合を考えることにより次の特別な固有関数が得られる.

Theorem 1. 線形化問題 (9) について次が成り立つ:

(i) $\mu_0^n(k) = -(1-k^2)$, $\quad \varphi_0(x;k) = \cos\dfrac{u_n(x;k)}{2}$,

(ii) $\mu_n^n(k) = k^2$, $\quad \varphi_n^n(x;k) = \dfrac{1}{k}\sin\dfrac{u_n(x;k)}{2}$.

次に $\rho_1(\mu,k) > 0$ の場合において Lemma 3.1 より次の定理が成り立つ.

Theorem 2. $j \neq 0,\ n$ とする. このとき $\mu_j^n(k) = \mu_1(k, j\pi/2n)$,

$$\varphi_j^n(x;k) = \sqrt{h_1(u_n(x),\mu_j^n(k);k))}\cos\left(\int_0^x \frac{4nK(k)\sqrt{\rho_1(\mu_j^n(k),k)}}{h_1(u_n(y),\mu_j^n(k);k)}dy\right).$$

Theorem 1 及びより (9) の全ての固有値・固有関数の解表示が得られる. さらに characteristic equation を詳しく解析することにより次の $k \to 1$ における固有値の漸近展開公式が得られる.

Theorem 3. $n \in \mathbf{N}$ 及び $j \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ を固定する.

(i) $0 < j < n$ ならば $\mu_j^n(k) = -\cos^2\dfrac{j\pi}{2n}\cdot(1-k^2) + o(1-k^2) \quad as \quad k \to 1$,

(ii) $j > n$ ならば $\mu_j^n(k) = 1 + \dfrac{(j-n)^2\pi^2}{4n^2}K(k)^{-2} + o(K(k)^{-2}) \quad as \quad k \to 1$.

Theorem 3 の主張を ε を主パラメータに取り直すことにより次の系が得られる.

Corollary 1. $n \in \mathbf{N}$ 及び $j \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ を固定する.

(i) $0 < j < n$ ならば $\mu_j^n = -16\cos^2\dfrac{j\pi}{2n}\cdot e^{-\frac{1}{n\varepsilon}} + o(e^{-\frac{1}{n\varepsilon}}) \quad as \quad \varepsilon \to 0$,

(ii) $j > n$ ならば $\mu_j^n = 1 + (j-n)^2\pi^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad as \quad \varepsilon \to 0$.

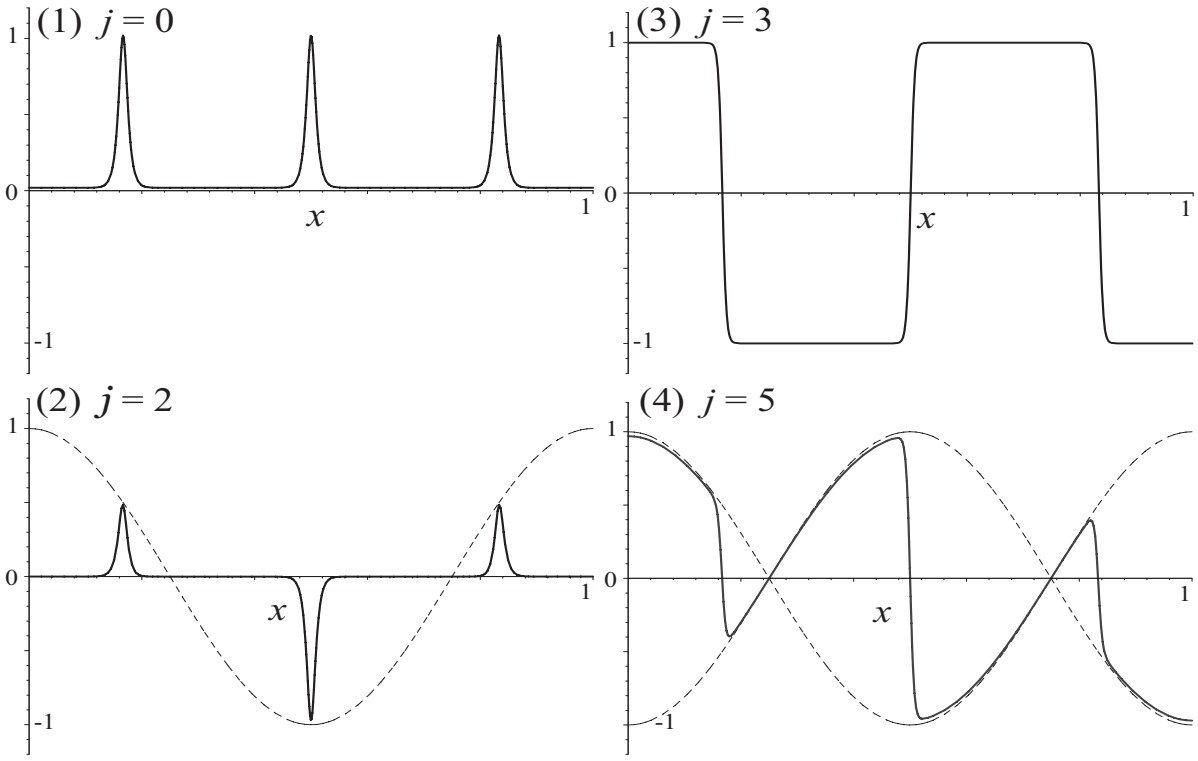

図 1: 固有関数のグラフ ($n = 3$, $k = 1 - 10^{-20}$)

3.2 $f(u) = u(1-u^2)$ の場合

$f(u) = u(1-u^2)$ の場合においても同様の方法で全ての固有値・固有関数の解表示が得られる. 紙面の都合上ここでは割愛し, 講演時に触れる.

4 Characteristic Equation の解析

固有値・固有関数の解表示や固有値の漸近展開公式を得るには, 第 3 種の楕円積分を含む超越方程式の解析を要する. ここでは Kosugi-Morita-Yotsutani の手法 [5] に基づき, Lemma 3.1 を証明する. 詳細は講演時に触れる.

参考文献

[1] P. Brunovský and B. Fiedler, J. Differential Equations, **81** (1989), 106-135.

[2] J. Carr and R.L. Pego, Commun. Pure Appl. Math. **42** (1989), 523-576.

[3] N. Chafee and E.F. Infante, Applicable Anal., **4** (1974/75), 17-37.

[4] J. Kovacic, J. Symbolic. Comput., **2** (1986), 3-43.

[5] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, Comm. Pure Appl. Anal., **3** (2005), 665-682.

[6] T. Wakasa, S. Yotsutani, to appear in Commun. Pure Appl. Anal.