

臨界 Sobolev 指数に関連するある固有値問題について： 臨界・線型摂動項付きの場合

高橋 太 (大阪市立大学・理)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 4)$ を滑らかな有界領域、 $p = (N+2)/(N-2)$ は臨界 Sobolev 指数、 $c_0 = N(N-2)$, $\varepsilon > 0$ は正のパラメーターとし、 $k \in C^2(\overline{\Omega})$ とする。この講演では次の楕円型方程式

$$(P_{\varepsilon,k}) \begin{cases} -\Delta u = c_0 u^p + \varepsilon k(x)u & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の爆発解のスペクトル解析的な性質について考察する。

解の存在について、Brezis-Nirenberg [2] の古典的な結果によって次が知られている：

$$S_{\varepsilon,k} = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} k(x) u^2 dx \right\}$$

とおく。 $\varepsilon > 0$ が十分小さく $-\Delta - \varepsilon k(x) \cdot$ が $H_0^1(\Omega)$ 上で強圧的なとき、係数関数 k が条件『領域 Ω のどこかで正』をみたせば、 $S_{\varepsilon,k}$ の最小化元の定数倍からなる $(P_{\varepsilon,k})$ の解が少なくともひとつ存在する。これを $(P_{\varepsilon,k})$ の最小エネルギー解と呼ぶ。

Brezis-Nirenberg の方法で作った最小エネルギー解 u_{ε} について、 $x_{\varepsilon} \in \Omega$ を $u_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) = \|u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ となる点列とすると、 $u_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) \rightarrow +\infty$ であり、部分列をとることで x_{ε} はある $x_0 \in \overline{\Omega}$ を集積点に持つことがわかる。この x_0 を解の列 $\{u_{\varepsilon}\}$ の爆発点と呼ぶ。

爆発点の位置については次が知られている ([4]):

$N \geq 4$ とする。 $\Omega_+ := \{x \in \Omega : k(x) > 0\} \neq \emptyset$ を仮定し、 $\{u_{\varepsilon}\}$ を Brezis-Nirenberg の方法で作った最小エネルギー解の族とする。このとき爆発点 $x_0 \in \Omega_+$ (特に x_0 は内点) であり、さらに x_0 は Ω_+ 上で定義された関数

$$F(x) = \frac{R(x)^{\frac{2}{N-2}}}{k(x)}, \quad x \in \Omega_+$$

の最小点となる。ここで R は領域の Green 関数 $G(x, y)$ から定まる (正值) Robin 関数 $R(x) = \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{1}{(N-2)\sigma_N} |x - y|^{2-N} - G(x, y) \right]$ をあらわす。

この講演では、係数関数 k が

$$k \in C^2(\overline{\Omega}), \quad k \geq 0 \text{ on } \overline{\Omega}, \quad \Omega_+ \neq \emptyset$$

をみたすことを仮定して、次の固有値問題

$$(E_{\varepsilon,k}) \begin{cases} -\Delta v = \lambda (c_0 p u_\varepsilon^{p-1} + \varepsilon k(x)) v & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = 1 \end{cases}$$

を考察する。係数関数 k の非負性より、重み関数 $W_\varepsilon(x) = c_0 p u_\varepsilon^{p-1} + \varepsilon k(x)$ は $W_\varepsilon > 0$ in $\overline{\Omega}$ をみたすので、固有値問題の一般論から $(E_{\varepsilon,k})$ には $\lambda_{1,\varepsilon} < \lambda_{2,\varepsilon} \leq \cdots \lambda_{i,\varepsilon} \leq \cdots \rightarrow +\infty$ をみたす固有値の列および直交条件

$$\int_{\Omega} W_\varepsilon(x) v_{i,\varepsilon} v_{j,\varepsilon} dx = 0 \quad (i \neq j)$$

を満足する $\{\lambda_{i,\varepsilon}\}$ に対応する固有関数の列 $v_{1,\varepsilon}, v_{2,\varepsilon}, \dots, v_{i,\varepsilon}, \dots$ が存在する。このとき、最小エネルギー解 u_ε の Morse 指数 (= 1) は $(E_{\varepsilon,k})$ の 1 より小さい固有値の個数に一致することに注意する。また

$$\tilde{v}_{i,\varepsilon}(y) = v_{i,\varepsilon} \left(\frac{y}{\|u_\varepsilon\|_{\infty}^{\frac{p-1}{2}}} + x_\varepsilon \right), \quad y \in \Omega_\varepsilon = \|u_\varepsilon\|_{\infty}^{\frac{p-1}{2}} (\Omega - x_\varepsilon)$$

とおく。

定理 1 (第 1 固有値・第 1 固有関数の漸近挙動)

$N \geq 5$ とする。このとき

$$\lambda_{1,\varepsilon} \rightarrow 1/p, \\ \tilde{v}_{1,\varepsilon}(y) \rightarrow U(y) = \left(\frac{1}{1 + |y|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \text{ in } C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$$

が $\varepsilon \rightarrow 0$ で 成り立つ。

定理 2 ($i = 2, 3, \dots, N+1$ の固有値と固有関数の漸近挙動)

$N \geq 6$ とする。このとき $i = 2, 3, \dots, N+1$ に対して次が成り立つ。

(1) $\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,N}) \neq \vec{0}$ が存在して、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき

$$\tilde{v}_{i,\varepsilon}(y) \rightarrow \sum_{j=1}^N a_{i,j} \frac{y_j}{(1 + |y|^2)^{\frac{N}{2}}} \text{ in } C_{loc}^2(\mathbb{R}^N), \\ \|u_\varepsilon\|_{\infty}^{2+\frac{2}{N-2}} v_{i,\varepsilon}(x) \rightarrow \sigma_N \sum_{j=1}^N a_{i,j} \left(\frac{\partial G}{\partial z_j} \right) (x, z)|_{z=x_0} \text{ in } C_{loc}^1(\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}).$$

(2)

$$\|u_\varepsilon\|_{\infty}^{\frac{2N}{N-2}} (\lambda_{i,\varepsilon} - 1) \rightarrow M \mu_{i-1}, \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

ここに $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_N$ は行列

$$A(x_0) = \left(\frac{2}{N-2} \frac{R_{x_i, x_j}(x_0)}{R} - \frac{k_{x_i, x_j}(x_0)}{k} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

の固有値で、 $M = \frac{(N-2)^2 \sigma_N^2 R(x_0)}{4p \int_{\mathbb{R}^N} U^{p-1} |\nabla U|^2 dy} > 0$ である。さらに $\vec{a}_i$ は固有値 μ_{i-1} に属する $A(x_0)$ の固有ベクトルで、 $i \neq j$ のとき、 $\vec{a}_i$ と $\vec{a}_j$ は $\mathbb{R}^N$ で直交する。

行列 A は $\text{Hess } \log F$ とは異なるが、 x_0 が $\log F$ の最小点であることを用いて $A(x_0)$ は非負値行列であることがわかる。このことから、次の系が得られる。これは [5] の主結果の別証明を与える。

系 ([5]) $N \geq 6$ とする。爆発点 x_0 において行列 $A(x)$ が非退化ならば、最小エネルギー解 u_ε も十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して非退化である。つまり u_ε の回りでの線形化作用素は 0 を固有値に持たない。

定理 3 ($i = N + 2$ の固有値と固有関数の漸近挙動)

$N \geq 6$ とする。このとき $b_{N+2} \neq 0$ が存在して

$$\tilde{v}_{N+2, \varepsilon}(y) \rightarrow b_{N+2} \frac{1 - |y|^2}{(1 + |y|^2)^{\frac{N}{2}}} \quad \text{in } C_{loc}^2(\mathbb{R}^N),$$

$$\|u_\varepsilon\|^2 (\lambda_{N+2, \varepsilon} - 1) = 2(N-2)M + o(1), \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

証明は主に [3] の方法に従うが、係数関数の影響を見るためにはより詳しい評価が必要となる。そのために [5] での計算手法を用いる。

証明中において、次の事実が鍵となる。

定理 (Bianchi-Egnell [1]) 固有値問題

$$\begin{cases} -\Delta V = \lambda (c_0 p U^{p-1}) V_i & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla V|^2 dy < \infty, \quad \|V\|_\infty = 1 \end{cases}$$

は、多重度有限な可算個の固有値 $\{\lambda_i\}$ を持ち、それらを多重度もこめて並べると

$$\lambda_1 = 1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{N+1} = \lambda_{N+2} = p < \lambda_{N+3} \leq \cdots,$$

となる。対応する 1 次独立な固有関数は (L^∞ ノルムを正規化する定数倍を除いて)

$$\begin{aligned} V_1 &= U, \\ V_i &= \frac{\partial U}{\partial y_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, N+1 \\ V_{N+2} &= y \cdot \nabla U + \frac{2}{p-1} U \end{aligned}$$

にとれる。

参考文献

- [1] G. Bianchi, H. Egnell: *A note on the Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **100** (1991) 18-24.
- [2] H. Brezis, and L. Nirenberg: *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure and Appl. Math. **36** (1983) 437-477.
- [3] M. Grossi, and F. Pacella: *On an eigenvalue problem related to the critical exponent*, Math. Z. **250** (2005) 225-256.
- [4] F. Takahashi: *Concentration points of least energy solutions to the Brezis-Nirenberg equation with variable coefficients*, “Self-similar solutions of nonlinear PDE” Banach Center Publ. **74** (2006) 217-234.
- [5] F. Takahashi: *Asymptotic nondegeneracy of least energy solutions to an elliptic problem with the critical Sobolev exponent*, Advances Nonlinear Studies, **8** (2008) 783-797.

558-8585

大阪市立大学大学院理学研究科

大阪市住吉区杉本 3 - 3 - 138

E-mail: futoshi@sci.osaka-cu.ac.jp