On global existence and blowup for damped nonlinear Schrödinger equations

太田 雅人 (埼玉大学理学部)

本講演では, 次の非線形 Schrödinger 方程式

$$(\mathrm{NLS})_{a,q} \qquad i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u + ia|u|^{q-1}u = 0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

に対する初期値問題の解の時間大域存在と有限時間爆発について考える. ここで, $a \ge 0$, $q \ge 1$, $p > 1$, q, $p < 1 + 4/(n-2)$ if $n \ge 3$ とする. このとき, $(\mathrm{NLS})_{a,q}$ に対する初期値問題は $H^1(\mathbb{R}^n)$ において適切である. 方程式 ($n = 2$, $p = 3$, $q = 1, 3, ...$) の物理的背景については [4] 等を参照のこと. 以下, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ を初期データとする $(\mathrm{NLS})_{a,q}$ の解の最大存在時間を $T^*_{a,q}(u_0)$ と表し, 3 つの場合

(A) $a = 0$ (usual NLS),

(B) $a > 0$ かつ $q = 1$ (NLS with linear damping),

(C) $a > 0$ かつ $q > 1$ (NLS with nonlinear damping)

に分けて考える.

Case (A) この場合の古典的な結果は, テキスト [2, 9] にまとめられている. $T^*_{a,q}(u_0)$ を $T^*(u_0)$ とかくと

- $p < 1 + 4/n$ のとき, $T^*(u_0) = \infty$ for $\forall u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$.
- $p \ge 1 + 4/n$ のとき, $T^*(u_0) = \infty$ if u_0 is sufficiently small in $H^1(\mathbb{R}^n)$, and $T^*(u_0) < \infty$ if $u_0 \in \Sigma$ satisfies $E(u_0) < 0$.

ここで, $\Sigma = \{v \in H^1(\mathbb{R}^n) : xv \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$,

$$E(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

とおいた. 時間大域存在は, blowup alternative:

$$T^*_{a,q}(u_0) < \infty \text{ ならば } \lim_{t \to T^*_{a,q}(u_0)} \|u(t)\|_{H^1} = \infty,$$

エネルギー $E(u)$ と電荷 $\|u\|_{L^2}^2$ の保存則, 及び Gagliardo-Nirenberg の不等式

$$\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \le C\|v\|_{L^2}^{(p+1)-n(p-1)/2}\|\nabla v\|_{L^2}^{n(p-1)/2}, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

から従う. 一方, 有限時間爆発は, virial 等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\|xu(t)\|_{L^2}^2 = 16P(u(t)), \quad t \in [0, T^*(u_0))$$

に基づく. ここで,

$$P(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{n(p-1)}{4(p+1)}\|v\|_{p+1}^{p+1}.$$

Case (B) このとき, $T_{a,q}^*(u_0)$ を $T_a^*(u_0)$ とかくと

$$\|u(t)\|_{L^2} = e^{-at}\|u_0\|_{L^2}, \quad t \in [0, T_a^*(u_0)) \tag{1}$$

だが, エネルギー $E(u(t))$ には一般に単調性はない. 実際

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -aK(u(t)), \quad K(v) := \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

が成り立つ. $p < 1 + 4/n$ のときは, $T_a^*(u_0) < \infty$ ならば $\lim_{t \to T_a^*(u_0)} \|u(t)\|_{L^2} = \infty$ という blowup alternative と (1) より, $\forall u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ に対して $T_a^*(u_0) = \infty$ である. 一方, $p > 1 + 4/n$ のとき, M. Tsutsumi [10] は, $T_a^*(u_0) < \infty$ となるための十分条件として, $u_0 \in \Sigma$ かつ

$$E(u_0) \le 0 \quad \text{and} \quad \frac{(p-1)a}{(p-1)n-4}I(u_0) + V(u_0) < 0 \tag{2}$$

を与えた. ここで

$$I(v) := \|xv\|_{L^2}^2, \quad V(v) := \Im \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla v(x)\overline{v(x)}\,dx$$

とおいた. [10] の証明は 2 つの等式

$$\frac{d}{dt}I(u(t)) + 2aI(u(t)) = 4V(u(t)), \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) + 2aV(u(t)) = 4P(u(t)) \tag{4}$$

に基づく. 臨界冪 $p = 1 + 4/n$ の場合も, [4, 1] などの数値計算により, 有限時間で爆発する解が存在すると思われるが, 講演者の知る限り未解決である.

問題 $p = 1 + 4/n$, $a > 0$ のとき, $T_a^*(u_0) < \infty$ となる $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ は存在するか?

講演者は, この問題の解決を目標として, Grozdena Todorova (University of Tennessee) と共同研究を始めたが, 次の定理はその過程で得られたものである ([6]).

Theorem 1 *Assume that* $1 + 4/n \le p < 1 + 4/(n-2)$*. For any* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *there exists* $a^*(\|u_0\|_{H^1}) \in [0,\infty)$ *such that* $T_a^*(u_0) = \infty$ *for all* $a \ge a^*(\|u_0\|_{H^1})$*.*

Theorem 2 *Let* $1 + 4/n < p < 1 + 4/(n-2)$*. Assume that* $u_0 \in \Sigma$ *satisfies* $E(u_0) < 0$*. Then, there exists* $a_*(u_0) > 0$ *such that* $T_a^*(u_0) < \infty$ *for all* $a \in [0, a_*(u_0))$*.*

注 1 Theorem 1 は [9, p.98] や [4, Theorem 2.4] に証明なしで述べられている. また, Theorem 1 の証明は, [3] 及び Strichartz 評価に基づくが, [1, Proposition 2.6] でも同様の結果が同様な方法で証明されている.
注 2 Theorem 2 の証明は [10] と同様に, 等式 (3), (4) に基づくが, Theorem 2 は [10] の条件 (2) からは従わないことに注意する.
注 3 Fibich [4] は数値計算などにより, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ を固定したとき, $T_a^*(u_0)$ は a に関して単調非減少であると予想しているが, Besse et al [1] では, この予想を否定する数値計算結果を示している. しかし, 各 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ に対して, $T_a^*(u_0) < \infty$ for $\forall a \in (0, a_{th}(u_0))$, $T_a^*(u_0) = \infty$ for $\forall a \in (a_{th}(u_0), \infty)$ となる $a_{th}(u_0) \in [0,\infty]$ が存在するという [4] の予想を否定する結果は得られていないようである.

Case (C) 複素 Ginzburg-Landau 方程式との関係で, $p = q$ の場合がよく研究されている ([5, 7, 11]) が, ここでは, $p \ne q$ の場合も考えたい.

- $\max\{p,q\} < 1+4/n$ のとき, $T_{a,q}^*(u_0) = \infty$ for $\forall u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. これは, blowup alternative: $T_{a,q}^*(u_0) < \infty$ ならば $\lim_{t \to T_{a,q}^*(u_0)} \|u(t)\|_{L^2} = \infty$, と

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = -a\|u(t)\|_{L^{q+1}}^{q+1} \le 0, \quad t \in [0, T_{a,q}^*(u_0))$$

  から従う.

- $p = q > 1$ のとき, $a \ge (q-1)/2\sqrt{q}$ ならば, $T_{a,q}^*(u_0) = \infty$ for $\forall u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ ([11]). 一方, $p = q \ge 1 + 4/n$, $a < (q-1)/2\sqrt{q}$ のときはどうか？[4] では, $n = 2$, $p = q = 3$ のとき, $\forall a > 0$ に対して, $T_{a,q}^*(u_0) = \infty$ for $\forall u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ と予想しているが, $p = q = 1 + 4/n$ と $p = q > 1 + 4/n$ で状況が異なると考えられる.

- $p < q$ のとき, $T_{a,q}^*(u_0) = \infty$ for $\forall u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. これは, $n = 2$, $p = 3 < q$ の場合の [8] の証明と同様にして示すことができる.

- $p > q$, $p \ge 1 + 4/n$ のときはどうか? [4] では, $n = 2$, $1 < q < p = 3$ のときは, $q = 1$ の場合と状況は似ていると予想しているが, 当面の問題として, たとえば, $q > 1$ のとき, Theorem 1 に対応する結果が成り立つかという問題はどうか？

参考文献

[1] C. Besse, R. Carles, N.J. Mauser and H.P. Stimming, *Monotonicity properties of the blow-up time for nonlinear Schrödinger equations: numerical evidence*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **9** (2008) 11–36.

[2] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[3] T. Cazenave and F. B. Weissler, *Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **147** (1992) 75–100.

[4] G. Fibich, *Self-focusing in the damped nonlinear Schrödinger equation*, SIAM J. Appl. Math. **61** (2001) 1680–1705.

[5] T. Ogawa and T. Yokota, *Uniqueness and inviscid limits of solutions for the complex Ginzburg-Landau equation in a two-dimensional domain*, Comm. Math. Phys. **245** (2004) 105–121.

[6] M. Ohta and G. Todorova, *Remarks on global existence and blowup for damped nonlinear Schrödinger equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (to appear).

[7] N. Okazawa and T. Yokota, *Monotonicity method applied to the complex Ginzburg-Landau and related equations*, J. Math. Anal. Appl. **267** (2002) 247–263.

[8] T. Passot, C. Sulem and P.-L. Sulem, *Linear versus nonlinear dissipation for critical NLS equation*, Physica D **203** (2005) 167–184.

[9] C. Sulem and P.-L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave-collapse*, Applied Mathematical Sciences 139, Springer-Verlag, New York, 1999.

[10] M. Tsutsumi, *Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984) 357–366.

[11] T. Yokota, *Monotonicity and compactness methods applied to the nonlinear Schrödinger and related equations*, Nonlinear Analysis and Applications: to V. Lakshmikantham on his 80th birthday, Vol. II, 939–956, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.