

On p -Laplacian problems with asymmetric nonlinearity

東京理科大学理学部二部数学科 田中 視英子

本講演では、以下の準線形楕円型方程式 $(E)_p$ の非自明な弱解の存在について報告する。

$$(E)_p \quad \begin{cases} -\Delta_p u = au_+^{p-1} - bu_-^{p-1} + f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ここで、 Ω は $\mathbb{R}^N$ の境界がなめらかな有界領域で、 $1 < p < \infty$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $u_{\pm} = \max\{\pm u, 0\}$ である。

定義 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \{au_+^{p-1} - bu_-^{p-1} + f(x, u)\} \varphi \, dx \quad \text{for } \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

を満たすとき、 u は方程式 $(E)_p$ の解であるという。

本講演では、非線形項 f として $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ with $f(x, 0) = 0$ for every $x \in \Omega$ かつ

$$f(x, t) = o(|t|^{p-1}) \quad \text{as } |t| \rightarrow \infty \text{ uniformly in } x \in \Omega, \quad (1)$$

を満たすものを考える。簡単な例として

$$f(x, u) = \alpha u_+^{q-1} - \beta u_-^{q-1}, \quad 1 < q < p, \quad \alpha, \beta > 0$$

などが挙げられる。

1. p -Laplacian の固有値について

定義 方程式

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

が非自明解をもつとき、 $\lambda \in \mathbb{R}$ は p -Laplacian の固有値であるといい、 $\lambda \in \sigma(-\Delta_p)$ と表す。

Remark 1.

- 第一固有値 $\lambda_1 > 0$ は孤立していて simple であり、以下で与えられる：

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx}{\int_{\Omega} |u|^p \, dx}.$$

- 第一固有値 λ_1 に対応する正值固有関数 $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ が存在する。

- $p = 2$ または $N = 1$ 以外では p -Laplacian の固有値は完全にはわかっていない.

$N = 1$ のとき $\Omega = (0, T)$ のとき

$$\sigma(-\Delta_p) = \{\lambda_n\}_n, \quad \lambda_n = n^p \lambda_1, \quad \lambda_1 = \left(2 \int_0^{(p-1)^{1/p}} \frac{ds}{(1 - s^p/(p-1))^{1/p}} \right)^p / T^p$$

であることが知られている.

一般の場合について p -Laplacian の固有値については, Ljusternik–Schnirelman type や Yang index, cohomology index (cf. [13], [15]) を用いて定義された固有値の列が存在することが知られているが, 本講演では Drábek–Robinson ([5]) により以下のように定義された p -Laplacian の固有値を用いる.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m &:= \{h \in C(S^{m-1}, M); h \text{ is odd} \} \quad (m \in \mathbb{N}), \\ \lambda_m &:= \inf_{h \in \mathcal{F}_m} \max_{u \in h(S^{m-1})} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx, \end{aligned} \quad (2)$$

ここで S^{m-1} は $\mathbb{R}^m$ の単位球面.

Remark 2.

- (2) で定義された λ_1 (resp. λ_2) は p -Laplacian の第一 (resp. 第二) 固有値と一致する.
- 各 λ_m は p -Laplacian の固有値で, 単調増加かつ $\lambda_m \rightarrow \infty$ as $m \rightarrow \infty$ を満たす.

2. Fučík スペクトルについて

$p = 2$ の Laplacian の場合に Dancer([2]) や Fučík ([6]) により Fučík spectrum が考えられてきたが, 最近になって Cuesta–de Figueiredo–Gossez ([1]) により一般の $p > 1$ に対しても p -Laplacian の Fučík spectrum が定義され, 研究され始めた.

定義 以下の方程式

$$\begin{cases} -\Delta_p u = au_+^{p-1} - bu_-^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

が非自明解を持つとき, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ は p -Laplacian の Fučík スペクトルであるといい, 以下では Fučík スペクトル全体を Σ_p で表す.

Remark 3.

- $(a, a) \in \Sigma_p \iff a$ が p -Laplacian の固有値
- p -Laplacian の第一固有値 λ_1 に対応する正値固有関数 $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ が存在するので

$$\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times \{\lambda_1\} \subset \Sigma_p$$

であることがわかる.

3. First nontrivial curve について

Cuesta–Figueiredo–Gossez ([1]) により, 以下のように First nontrivial curve の存在が示されている: パラメータ $s \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} J_s(u) &:= \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - s \int_{\Omega} u_+^p dx \quad \text{for } u \in M, \\ M &:= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega); \int_{\Omega} |u|^p dx = 1 \right\} \\ \Sigma &:= \{ \gamma \in C([0, 1], M); \gamma(0) = \varphi_1, \gamma(1) = -\varphi_1 \} \\ c(s) &:= \inf_{\gamma \in \Sigma} \max_{t \in [0, 1]} J_s(\gamma(t)). \end{aligned} \tag{3}$$

と定義する, ここで, φ_1 は第一固有値 λ_1 に対応する正値固有関数で $\int_{\Omega} \varphi_1^p dx = 1$ を満たすものとする.

Remark 4.

- 各 $c(s)$ は J_s の臨界値である. 従って $(c(s) + s, c(s)) \in \Sigma_p$.
- $c: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ は Lipschitz 連続で $c(s)$ は狭義単調減少, $c(s) + s$ は狭義単調増加であり以下を満たす. ここで λ_2 は第二固有値である.

$$c(0) = \lambda_2, \quad c(s) > \lambda_1 \quad \text{for all } s \geq 0, \quad c(s) \rightarrow \lambda_1 \quad \text{as } s \rightarrow +\infty$$

このとき,

$$\mathcal{C} = \{ (s + c(s), c(s)) : s \geq 0 \} \cup \{ (c(s), s + c(s)) : s \geq 0 \}$$

で定義された Σ_p に含まれる曲線を first nontrivial curve と呼ぶ.

4. Σ_p に含まれるその他の曲線について

$N = 1$ のとき P. Drábek([4]) により $N = 1$ の場合には完全に Σ_p が次のように与えられている.

$\Omega = (0, \pi)$ とする. $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{2k} &= \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{\lambda_1}{a} \right)^{1/p} + \left(\frac{\lambda_1}{b} \right)^{1/p} = \frac{1}{k} \right\} \\ \mathcal{C}_{2k+1}^+ &= \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{\lambda_1}{a} \right)^{1/p} + \left(\frac{\lambda_1}{b} \right)^{1/p} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{a} \right)^{1/p} \right\} \\ \mathcal{C}_{2k+1}^- &= \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{\lambda_1}{a} \right)^{1/p} + \left(\frac{\lambda_1}{b} \right)^{1/p} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{b} \right)^{1/p} \right\}\end{aligned}$$

と定義すると

$$\Sigma_p = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathcal{C}_{2k} \cup \mathcal{C}_{2k+1}^+ \cup \mathcal{C}_{2k+1}^-) \cup \{\text{trivial lines}\}$$

で与えられる.

$p = 2$ のときは, M. Schechter([16]), 一般の場合には K. Perera([14]) や A. M. Micheletti–A. Pistoia([8]) などが扱っている.

5. 原点と無限遠方でともに asymmetric な非線形項をもつ方程式の非自明解の存在について

方程式

$$(E2)_p \quad \begin{cases} -\Delta_p u = g(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ここでは, 非線形項 g は

$$g(x, u) = \begin{cases} a_0 u_+^{p-1} - b_0 u_-^{p-1} + o(|u|^{p-1}) & \text{at } 0, \\ a u_+^{p-1} - b u_-^{p-1} + o(|u|^{p-1}) & \text{at } \infty \end{cases}$$

であるようなものを考える. このとき $(a_0, b_0) \notin \Sigma_p$ かつ $(a, b) \notin \Sigma_p$ であるときには (a_0, b_0) と (a, b) の a - b 平面上での位置関係によって, 方程式 $(E2)_p$ は複数個の非自明解を持つことが知られている. (cf. [3], [7], [9])

6. 非線形項 f に対する仮定と存在結果

(f0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ with $f(x, 0) = 0$ for every $x \in \Omega$, $f(x, t)t > 0$ for every $t \neq 0$, $x \in \Omega$ かつ

$$f(x, t) = o(|t|^{p-1}) \quad \text{as } |t| \rightarrow \infty \text{ uniformly in } x \in \Omega,$$

(f1) $\exists \delta > 0, \exists C_0 > 0$ and $\exists q \in (1, p)$ s.t.

$$\int_0^t f(x, s) ds =: F(x, t) \geq C_0 |t|^q \quad \text{for } |t| \leq \delta, x \in \Omega.$$

(f2)

$$pF(x, t) - f(x, t)t \rightarrow +\infty \quad \text{as } |t| \rightarrow \infty \text{ uniformly in } x \in \Omega$$

定理 1 ([10]) 条件 (f0), (f1), (f2) を仮定する. このとき $(a, b) \in (-\infty, \lambda_1) \times \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_1\} \times (-\infty, \lambda_1)$ ならば, 方程式 $(E)_p$ は **少なくとも二つの** 非自明解を持つ.

定理 2 ([11]) 条件 (f0), (f1), (f2) を仮定する. このとき $(a, b) \in [\lambda_1, +\infty) \times \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_1\} \times [\lambda_1, +\infty)$ ならば, 方程式 $(E)_p$ は **少なくとも一つの** 非自明解を持つ.

7. a と b が十分近いときの存在結果について

各 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$Q_m := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a, b \in [\lambda_m, \lambda_{m+1})\} \quad \lambda_0 = -\infty$$

と定義する. ここで λ_m は (2) で定義された p -Laplacian の固有値である. このとき, 以下の結果が得られる.

定理 3 ([11], [12]) $(f0), (f1)$ を仮定する. 以下の (i) または (ii) が成り立つとき, 方程式 $(E)_p$ は **少なくとも一つの** 非自明解を持つ.

(i) $\exists m \in \mathbb{N} \cup \{0\}: (a, b) \in Q_m \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_p)$

(ii) $\exists m \in \mathbb{N} \cup \{0\}: (a, b) \in Q_m$ かつ (f2) を満たす.

定理 3 から次の系が得られる.

系 非線形項 f は $(f0), (f1), (f2)$ を満たすとする. $a = b$ ならば, 方程式 $(E)_p$ は **少なくとも一つの** 非自明解を持つ.

8. 証明の概略について

証明は $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上で定義された以下の C^1 級汎関数

$$I_{(a,b)}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - a \int_{\Omega} u_+^p dx - b \int_{\Omega} u_-^p dx - p \int_{\Omega} F(x, u) dx$$

が非自明な臨界点を持つことを示すことによって行われる.

ここで, 問題点の一つは, $(a, b) \in \Sigma_p$ の場合には, 一般には $I_{(a,b)}$ は Palais–Smale 条件を満たさないことにある. そこで, 非線形項 f に条件 (f2) を課すことによって, Palais–Smale 条件よりも弱い条件である Cerami 条件を用いて, この問題点を解決する.

定義 Banach 空間 X 上で定義された C^1 級汎関数 Φ が

$$\Phi(u_n) \rightarrow c, \quad (1 + \|u_n\|_X)\|\Phi'(u_n)\|_{X^*} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす任意の $\{u_n\}_n \subset X$ が収束部分列を持つとき, Φ は $c \in \mathbb{R}$ で Cerami 条件を満たすという. とくに, Φ が任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して Cerami 条件を満たすとき, 単に Φ は Cerami 条件を満たすという.

Remark 5. Banach X 上で定義された C^1 級汎関数 Φ が Cerami 条件を満たすとき (Palais–Smale 条件のときと同様に) Φ は deformation property をもつ. すなわち, $c \in \mathbb{R}$ が Φ の正則値ならば, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して以下の条件をみたす (deformation) $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ が存在する:

- (i) $\eta(0, u) = u$ for all $u \in X$
- (ii) $\Phi(u) \notin (c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon) \implies \eta(t, u) = u$ for all $t \in [0, 1]$
- (iii) 任意の $u \in X$ に対して $\Phi(\eta(t, u))$ は単調減少
- (iv) $\Phi(u) \leq c + \varepsilon \implies \Phi(\eta(1, u)) \leq c - \varepsilon$

参考文献

- [1] M. Cuesta, D. de Figueiredo, and J.-P. Gossez, *The beginning of the Fučík spectrum for the p -Laplacian*, J. Differential Equations, **159**(1999), 212–238.
- [2] E. Dancer, *On the Dirichlet problem for weak nonlinear elliptic partial differential equations*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **76A**(1977), 283–300.
- [3] N. Dancer and K. Perera, *Some Remarks on the Fučík Spectrum of the p -Laplacian and Critical Groups*, J. Math. Anal. Appl., **254**(2001), 164–177.
- [4] P. Drábek, “Solvability and Bifurcations of Nonlinear Equations”, Pitman Research Notes in Mathematics, 1992.
- [5] P. Drábek and S. B. Robinson, *Resonance Problems for the p -Laplacian*, J. Functional Analysis, **169**(1999), 189–200.
- [6] S. Fučík, *Boundary value problems with jumping nonlinearities*, Casopis Pest. Mat., **101**(1976), 69–87.
- [7] M. Y. Jiang, *Critical groups and multiple solutions of the p -Laplacian equations*, Nonlinear Anal., **59**(2004), 1221–1241.
- [8] A. M. Micheletti and A. Pistoia, *On the Fucik spectrum for the p -Laplacian*, Differential and Integral Equations, **14**(2001), 867–882.

- [9] M. Tanaka, *On the existence of a non-trivial solution for the p -Laplacian equation with a jumping nonlinearity*, (to appear in “Tokyo J. Math”).
- [10] M. Tanaka, *Existence of a non-trivial solution for the p -Laplacian equation with Fučík type resonance at infinity* (to appear in “Nonlinear Anal. TMA”).
- [11] M. Tanaka, *Existence of a non-trivial solution for the p -Laplacian equation with Fučík type resonance at infinity II* (to submitted).
- [12] M. Tanaka, *Existence of non-trivial solutions for p -Laplacian equations with resonance*, proceeding of WCNA 2008 (to submitted).
- [13] K. Perera, *Nontrivial critical groups in p -Laplacian problems via the Yang index*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **21**(2003), 301–309.
- [14] K. Perera, *On the Fučík Spectrum of the p -Laplacian*, Nonlinear Differential Equations Appl., **11**(2004), 259–270.
- [15] K. Perera and A. Szulkin, *p -Laplacian problems where the nonlinearity cross an eigenvalue*, Discrete Continuous Dynamical Systems, **113**(2005), 743–753.
- [16] M. Schechter, *The Fučík Spectrum*, Indiana Univ. Math. J., **43**(1994), 1139–1157.