# Kernel estimates and $L^p$-spectral independence of generators of $C_0$-semigroups

第 74 回 神楽坂解析セミナー (2008.10.25)

進藤久和　（東京理科大学 理学部数学科）

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は開集合とし，各 $1 \le p < \infty$ に対し，$L^p(\Omega)$ 上の $C_0$-半群 $(e^{tA_p})_{t\ge 0}$ が定まっているとする．ここで，任意の $1 \le p, q < \infty$ に対し，

$$e^{tA_p} f = e^{tA_q} f \quad (t \ge 0, f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega))$$

が成り立っているとき，$A_p$ のスペクトルが $p \in [1, \infty)$ に依らないことを期待するのは自然であるが，実際には，成り立つとは限らないことが W. Arendt により例示されている (*cf.* [1, Section 3])．とは言え，この $e^{tA_p}$ と $e^{tA_q}$ の関係性は非常に自然であるので，これが成り立たない状況は考えないことにすると，$A_p$ のスペクトルが $p$ に依らないことを導くには，より強い仮定が必要になる．

この問題に関して，$L^2(\Omega)$ 上の $C_0$-半群 $T$ が積分核を持つ場合に，

- $T$ が各 $L^p(\Omega)$ 上に $C_0$-半群 $T_p$ を誘導し，
- $T_p$ の生成作用素のスペクトルが $p$ に依らない

ための条件（仮定 1）を見出した．この仮定の下で得られた結果（定理 2）の応用として，$(-\Delta)^\alpha + V$ のスペクトルの $L^p$-不変性を示すことができる（定理 5）．ここで，$\Delta$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ における通常の Laplacian である．この定理 5 と密接な関係のある先行研究として，[10] と [3] があり，これらの論文では $-\Delta/2 + V$ のスペクトルの $L^p$-不変性が示されている．

**仮定 1.** $(T(t))_{t\ge 0}$ は $L^2(\Omega)$ 上の $C_0$-半群であるとし，各 $t > 0$ に対し $T(t)$ は積分核 $K_t \colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ を持つとする．さらに，以下の条件を満たす $\phi\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$, $F\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$, $\kappa > 0$ が存在するとする：

(i) 各 $t > 0$ に対し，$|K_t(x,y)| \le \phi(t) F(t^{-\kappa}x, t^{-\kappa}y)$ (a.e. $(x,y) \in \Omega \times \Omega$).

(ii) ある $\delta \in (0,1]$ があって $F \in A^{0,0}_{w_\delta,2}$（下記参照）.

(iii) $t \mapsto t^{\kappa N}\phi(t)$ は $(0,\infty)$ 上で有界.

(ii) の $F \in A^{0,0}_{w_\delta,2}$ は，大まかに言って，

- 各 $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p < \infty)$ 上に，$F$ を積分核とする有界な作用素が定まり，
- $|x-y| \to \infty$ のとき，割と速く $F(x,y)$ が減少する

ことを意味する．$A^{0,0}_{w_\delta,2}$ に関しては，他に注意すべきこととして，特異性をある程度持つ積分核は属せないという制約条件があるが，これについては補題 4 の前でまた簡単に述べることにする．詳細については，[2], [6], [9] のいずれかを参照されたい．

仮定 1 は，[7] で定義された $\alpha$ 次 Gaussian estimate の一般化になっており，$e^{t\Delta}$ や $e^{-t(-\Delta)^{1/2}}$ は仮定 1 を満たしている．

**定理 2** (*cf.* [9, Theorem 3.9])**.** $L^2(\Omega)$ 上の $C_0$-半群 $T$ が仮定 1 を満たすとすると，$T$ は各 $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ 上に $C_0$-半群を誘導し，その生成作用素 $A_p$ のスペクトルに関し，以下が成り立つ.

(i) $T(t)$: normal $(\forall t \ge 0) \Rightarrow \sigma(A_p)$ は $p \in [1, \infty)$ に依らない.

(ii) 一般に $\sigma(A_p) \cup \sigma(A_{p'})$ は $p \in (1, \infty)$ に依らない（なお $1/p + 1/p' = 1$）.

この定理を示す際，以下の B.A. Barnes による定理を用いる.

**定理 3** (*cf.* [2, Theorem 4.8])**.** $K \colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ は可測とし，ある $\delta \in (0, 1]$ があって，$K \in A^{0,0}_{w_\delta,2}$ とする．このとき，次が成り立つ（記号の定義は下記）.

(i) $\pi_2(K)$: normal $\Rightarrow \sigma(\pi_p(K)) = \sigma(K; A^{0,0}_{w_\delta,2})$ $(\forall p \in [1, \infty])$.

(ii) 一般に $\sigma(\pi_p(K)) \cup \sigma(\pi_{p'}(K)) = \sigma(K; A^{0,0}_{w_\delta,2})$ $(\forall p \in [1, \infty])$.

ここで，$\pi_p(K)$ は $K$ を積分核とする $L^p(\Omega)$ 上の有界線型作用素を表す: $(\pi_p(K)f)(x) := \int_\Omega K(x, y) f(y)\, dy$ $(f \in L^p(\Omega)$, a.e. $x \in \Omega)$．また，$\sigma(K; A^{0,0}_{w_\delta,2})$ は，Banach 環 $A^{0,0}_{w_\delta,2}$ の要素としての $K$ のスペクトルを表す.

一見，この定理から定理 2 がすぐに導かれるようにも思えるが，$A^{0,0}_{w_\delta,2}$ には特異性をある程度持つ積分核が属せないことから，生成作用素のレゾルベントの積分核にこの定理が適用できないことが多く，したがって定理 2 が簡単に示せるわけではない．代わりに，半群の積分核や生成作用素のレゾルベントの十分高い冪乗の積分核に定理 3 を適用できる場合が多いが，これらのスペクトルの $L^p$-不変性から生成作用素のスペクトルの $L^p$-不変性が示せるかは自明ではない．この点に関して，以下の補題を示すことができた.

**補題 4** (*cf.* [9, Lemma 5.3])**.** $(e^{tA_p})_{t \ge 0}$ は $L^p(\Omega)$ 上の有界 $C_0$-半群とする．もし，ある $t_0 > 0$ があって，任意の $\beta \in (0, 1)$ に対し，$\sigma(e^{-t_0(-A_p)^\beta})$ が $p \in [1, \infty)$ に依らなければ，$\sigma(A_p)$ は $p \in [1, \infty)$ に依らない.

この補題は，作用素の分数幂の理論と，半群や分数幂に対するスペクトル写像定理を用いることによって示せる．この補題により，定理 3 を適宜用いて，定理 2 を証明できる.

次に，定理 2 の応用として，$(-\Delta)^\alpha + V$ のスペクトルの $L^p$-不変性に関する結果を述べる $(0 < \alpha \le 1)$. 便宜上，以降は $L^p := L^p(\mathbb{R}^N)$ とする.

先に，以下の定理 5 の仮定の下で成り立つ基本的事実を述べておく．定理 5 の仮定の下では,

$$U_{\alpha,2,V}(t) := \text{s-}\lim_{n\to\infty} \exp(-t((-\Delta)^\alpha + V^{(n)}))$$

(ただし，$V^{(n)} := (\mathrm{sgn}V)(|V| \wedge n)$) が存在し，$L^2$ 上の $C_0$-半群をなす．また，各 $p \in [1, \infty)$ に対し，$L^p$ 上の $C_0$-半群 $U_{\alpha,p,V}(t)$ で $U_{\alpha,p,V}(t)f = U_{\alpha,2,V}(t)f$ $(t \ge 0, f \in L^2 \cap L^p)$ となるものが一意的に存在する (*cf.* [11], [8])．したがって，以下の定理の仮定の下で，$U_{\alpha,p,V}(t)$ の生成作用素のスペクトルの $L^p$-不変性を考察することができる.

**定理 5** (*cf.* [9, Theorem 4.2])**.** $0 < \alpha \le 1$ とし，可測関数 $V \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ の positive part $V_+ := V \vee 0$ と negative part $V_- := (-V) \vee 0$ はそれぞれ以下の (i) と (ii) を満たすとする：

(i) $H^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap D(V_+^{1/2})$ は $L^2$ 内で稠密.

(ii) $c'_{N,\alpha}(V_-) := \lim_{\eta\downarrow 0} \|V_- \int_0^\eta \exp(-t(-\Delta)^\alpha)\,dt\|_{1,1} < 2\alpha/(N+2\alpha)$. ただし，左辺のノルムは $\sup\{\|V_- \int_0^\eta \exp(-t(-\Delta)^\alpha) f\,dt\|_{L^1} \mid f \in L^1 \cap L^2, \|f\|_{L^1} \le 1\}$ を表す.

このとき，$U_{\alpha,p,V}$ の生成作用素のスペクトルは $p \in [1,\infty)$ に依らない.

この定理は，仮定の下で $U_{\alpha,2,V}(t)$ の積分核 $K_{\alpha,V}(t;x,y)$ が存在して仮定 1 の評価を満たすことから，定理 2 を適用することで示される．$U_{\alpha,2,V}(t)$ の積分核の存在と評価は [5, Theorem 3.10] から導かれ，その評価式を具体的に述べると次の通りである：任意の $\nu \in (c'_{N,\alpha}(V_-), 2\alpha/(N+2\alpha))$ に対し，ある定数 $C>0$, $\omega \in \mathbb{R}$ があって，

$$0 \le K_{\alpha,V}(t;x,y) \le Ce^{\omega t} t^{-N/(2\alpha)} \cdot \frac{1}{(1+t^{-1/\alpha}|x-y|^2)^{(N/2+\alpha)(1-\nu)}}$$

($t>0$, a.e. $x \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$) が成り立つ．$\nu$ の範囲は，[5, Theorem 3.10] を適用するためと $K_{\alpha,V}(t;x,y)$ が仮定 1 を満たすための 2 つの用件から上のように制限されている．また，このような $\nu$ が取れるようにするために，$c'_{N,\alpha}(V_-)$ に定理 5 の仮定が付いてしまっている．このような理由から，定理 5 は，$\alpha$ が小さいほど仮定が強くなってしまっているが，[8, Theorem 4.2] と比較すると，かなり改良された結果である．

## 参考文献


[1] Arendt, W., *Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in $L^p$*, Diff. Int. Equations **7** (5) (1994), 1153–1168.

[2] Barnes, B.A., *The spectrum of integral operators on Lebesgue spaces*, J. Operator Theory **18** (1987), 115–132.

[3] Hempel, R., Voigt, J., *The spectrum of a Schrödinger operator in $L_p(\mathbb{R}^\nu)$ is p-independent*, Comm. Math. Phys. **104** (1986) 243–250.

[4] Karrmann, S., *Gaussian estimates for second-order operators with unbounded coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **258** (2001), 320–348.

[5] Liskevich, V., Vogt, H., Voigt, J., *Gaussian bounds for propagators perturbed by potentials*, J. Funct. Anal. **238** (2006), 245–277.

[6] Miyajima, S., Shindoh, H., *Gaussian estimates of order $\alpha$ and $L^p$-spectral independence of generators of $C_0$-semigroups II*, SUT J. Math. **42** (2) (2006), 357–371.

[7] Miyajima, S., Shindoh, H., *Gaussian estimates of order $\alpha$ and $L^p$-spectral independence of generators of $C_0$-semigroups*, Positivity **11** (1) (2007), 15–39.

[8] Shindoh, H., *$L^p$-spectral independence of fractional Laplacians perturbed by potentials*, SUT J. Math. **42** (2) (2006), 225–294.

[9] Shindoh, H., *Kernel estimates and $L^p$-spectral independence of generators of $C_0$-semigroups*, J. Funct. Anal. **255** (2008), 1273–1295.

[10] Simon, B., *Brownian motion, $L^p$ properties of Schrödinger operators and the localization of binding*, J. Funct. Anal. **35** (1980) 215–229.

[11] Voigt, J., *Absorption semigroups, their generators, and Schrödinger semigroups*, J. Funct. Anal. **67** (1986), 167–205.