第７３回神楽坂解析セミナー　　平成２０年７月２６日

Local solvability of free surface problems for the Navier-Stokes equations with surface tension [*1]

清水 扇丈　(静岡大理)

$\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ を非圧縮性粘性流体が占めており，$t=0$ でのみ与えられ $t>0$ とともに変化する有界領域とする．初期領域 Ω_0 と初期流速 v_0 が与えられたとき, Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} & v_t + (v\cdot\nabla)v - \mathrm{Div}\, S(v,\theta) = 0 && \text{in } \Omega_t,\ t>0, \\ & \mathrm{div}\, v = 0 && \text{in } \Omega_t,\ t>0, \\ & S(v,\theta)\nu_t = \sigma\mathcal{H}\nu_t - p_0\nu_t && \text{on } \Gamma_t,\ t>0, \\ & v|_{t=0} = v_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

を満たす流速ベクトル $v(x,t) = (v_1,\ldots,v_n)^*$，圧力 $\theta(x,t)$ $(x\in\Omega_t)$, 有界領域 Ω_t を求める問題を考察する．ここで Γ_t は Ω_t の境界，ν_t は Γ_t の単位外法線とする．$S(v,\theta) = \mu D(v) - \theta I$ はストレステンソルで, $D(v) = (D(v))_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$, $\mathcal{H}$ は平均曲率で, $\Delta_{\Gamma(t)}$ を Γ_t 上の Laplace-Beltrami 作用素とするとき, $\mathcal{H}\nu_t = \Delta_{\Gamma(t)}x$ で与えられる．$\mu>0$ は粘性係数, $\sigma>0$ は表面張力係数, $p_0>0$ は外部圧力である．

Solonnikov [4, 6, 7, 8] により (1) の整合条件を満たす任意の初期値に対する時間局所一意可解性が流速について $W_2^{2+\ell,1+\ell/2}$ $(1/2<\ell<1,\ n=3)$ で証明されている．Moglilevskiĭ-Solonnikov [1], Solonnikov [8] は時間局所一意可解性を Hölder 空間で証明している．本講演では, 整合条件を満たす任意の初期値に対して (1) の時間局所一意可解性が, $W_{q,p}^{2,1}$ (p は時間指数で $2<p<\infty$, q は空間指数で $n<q<\infty$) で成立することを報告する．

$\sigma=0$ の場合, 即ち表面張力を考慮に入れない場合には, Solonnikov [5], 柴田-清水 [2, 3] によって整合条件を満たす任意の初期値に対する時間局所一意可解性, 及び小さな初期値に対する時間大域一意可解性が $W_q^{2,1}$ $(n<q<\infty)$, $W_{q,p}^{2,1}$ $(2<p<\infty,\ n<q<\infty)$ で証明されている．

以後 $\Omega=\Omega_0$, $\Gamma=\Gamma_0$ とする．境界上の流体粒子は常に境界上にあり, また領域内部から境界上に流体粒子が発生することがないことを仮定する．$u(\xi,t)$ を Lagrange 座標での流速ベクトルとすると，Euler 座標と Lagrange 座標は

$$x = \xi + \int_0^t u(\xi,\tau)\,d\tau = X_u(\xi,t) \tag{2}$$

で関係づけられる．$\theta(X_u(\xi,t),t) = \pi(\xi,t)$ とおき (1) は Lagrange 座標系で次の方程式となる:

$$\begin{aligned} & \partial_t u - \mathrm{Div}\, S(u,\pi) = \mathrm{Div}\, Q(u) + R(\pi) && \text{in } \Omega,\ t>0, \\ & \mathrm{div}\, u = E(u) = \mathrm{div}\tilde{E}(u) && \text{in } \Omega,\ t>0, \\ & (S(u,\pi)+Q(u))\nu_{tu} - \sigma\mathcal{H}\nu_{tu} = 0 && \text{on } \Gamma,\ t>0, \\ & u|_{t=0} = u_0(\xi) && \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

[*1] 柴田良弘先生（早稲田大学）との共同研究による。

ここで $u_0(\xi) = v_0(x)$. $\nu_{tu} = {}^tA^{-1}\nu_0/|{}^tA^{-1}\nu_0|$ で A は (2) の Jacobi 行列

$$a_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = \delta_{jk} + \int_0^t \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}\, d\tau$$

を成分とする行列である. $Q(u)$, $R(\pi)$, $E(u)$ $\tilde{E}(u)$ は $V_j(0) = 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ を満たす多項式で与えられる非線形項である:

$$Q(u) = \mu V_1(\int_0^t \nabla u\, d\tau)\nabla u, \quad R(\pi) = V_2(\int_0^t \nabla u\, d\tau)\nabla \pi,$$
$$E(u) = V_3(\int_0^t \nabla u\, d\tau)\nabla u, \quad \tilde{E}(u) = V_4(\int_0^t \nabla u\, d\tau)u.$$

境界 Γ で新しい関数 η を導入し, 次を (3) の線形化問題とする:

$$\begin{aligned}
&\partial_t u - \mu\Delta u + \nabla\pi = f, && x \in \Omega,\ t > 0,\\
&\operatorname{div} u = f_d = \operatorname{div} \tilde{f}_d && x \in \Omega,\ t > 0,\\
&\partial_t \eta - \nu_0 \cdot u = d && x \in \Gamma,\ t > 0,\\
&S(u,\pi)\nu_0 - \sigma\Delta_\Gamma \eta\, \nu_0 = h && x \in \Gamma,\ t > 0,\\
&u|_{t=0} = u_0,\ \eta|_{t=0} = \eta_0.
\end{aligned} \tag{4}$$

(4) の解析的半群と L_p-L_q 最大正則性定理に基づき, 次の結果を得る.

Theorem 1. $\Gamma \in W^3_q$, $2 < p < \infty$, $n < q < \infty$, $2(1 - 1/p) > 1 + 1/q$ とする. 初期値

$$u_0 \in B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\Omega) = [L_q(\Omega), W^2_q(\Omega)]_{1-1/p,p}$$

は次の整合条件を満たすとする:

$$\operatorname{div} u_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad D(u_0) - (D(u_0)\nu_0, \nu_0)\nu_0 = 0 \quad \text{on } \Gamma.$$

このとき $T = T(\|u_0\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\Omega)}, \|\eta_0\|_{W^3_q}) > 0$ が存在して (3) は次の一意解を持つ:

$$u \in L_p((0,T), W^2_q(\Omega)) \cap W^1_p((0,T), L_q(\Omega)), \quad \pi \in L_p((0,T), W^1_q(\Omega)).$$

参考文献

[1] I. Sh. Mogilevskiĭ and V. A. Solonnikov, Nonlinear Analysis. (1991) 257–272.

[2] Y. Shibata and S. Shimizu, Differential Integral Equations, **20** (2007), 241–276.

[3] Y. Shibata and S. Shimizu, J. Reine Angew. Math. **615** (2008), 157–209.

[4] V. A. Solonnikov, J. Soviet Math., **32** (1986) 223–238.

[5] V. A. Solonnikov, Math. USSR Izv., **31** (1988) 381–405.

[6] V. A. Solonnikov, Leningrad Math. J., **1** (1990) 227–276.

[7] V. A. Solonnikov, St. Petersburg Math. J., **3** (1992) 189–220.

[8] V. A. Solonnikov, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.