

非線型消散項を伴うシュレディンガー 方程式の任意の大きさの初期データに 対する解の漸近挙動

下村 明洋（首都大学東京 大学院理工学研究科）

本講演は，北直泰氏（宮崎大学）との共同研究 [5] に基づく．空間 1 次元に於ける非線型シュレディンガー方程式の初期値問題

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = f(u), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

の解の長時間挙動を考える． $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$ で， $u = u(t, x)$ は複素数値の未知関数， $u_0 = u_0(x)$ は与えられた複素数値の初期データである． $f(u)$ は非線型項で，

$$f(u) = \lambda|u|^{p-1}u$$

とする．ここで， p は $1 < p \leq 3$ を満たす定数， $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ は

$$\lambda_2 \equiv \text{Im } \lambda < 0 \quad (3)$$

を満たす複素定数である．

一般に，非線型シュレディンガー方程式に於いて，空間次元を n とすると，非線型項 $|u|^{p-1}u$ は， $p > 1 + 2/n$ ならば時刻無限大で非線型項の影響は無視可能（短距離型相互作用）で，適当な非自明な自由解に近づく非線型方程式の解が存在する事が知られている．一方， $1 < p \leq 1 + 2/n$ ならばその寄与は無視不可能（長距離型相互作用）である事が知られていて，非自明な自由解に近づく非線型方程式の解は存在しない事が知られている．ここで，自由解とは，自由シュレディンガー方程式

$$i\partial_t w + \frac{1}{2}\Delta w = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (4)$$

の解である．本研究では， $n = 1, p \leq 3$ の場合を考えるので，非線型項 $f(u)$ は長距離型相互作用である．方程式 (1) の解は $t \rightarrow \infty$ の時に自由解の様に振舞う事は期待出来ない．

複素係数 λ が条件 (3) を満たす時，方程式 (1) と条件 (3) より，(1) の非自明な解 u に対して $\|u(t)\|_{L^2}$ が t に関して減少する事が簡単に示され，非線型項 $\lambda|u|^{p-1}u$ が消散性を持つ事が分かる．実際， u を方程式 (1) の非自明な解とすると，方程式 (1) と条件 (3) より，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 &= 2 \operatorname{Re}\langle \partial_t u(t), u(t) \rangle \\ &= 2(\operatorname{Im} \lambda) \langle |u(t)|^{p-1}u(t), u(t) \rangle \\ &= 2(\operatorname{Im} \lambda) \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} < 0\end{aligned}$$

であり， $\|u(t)\|_{L^2}$ が減少する（ここで， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L^2 に於ける内積である．）一方， λ が実数の時は， $\|u(t)\|_{L^2}$ は保存され減少しない．従って，条件 (3) の下では， λ が実数の場合と比べて，非線型項 $\lambda|u|^{p-1}u$ は (1) の解を減衰させる効果がある様に推測出来る．

以上より，方程式 (1) は解を減衰させる効果のある非線型項を持ち，時刻無限大での挙動にその寄与が現れると考えられる．長距離型の非線型消散項が解の長時間挙動に与える影響を調べる．本講演では，非線型項の消散性が比較的大きい場合に，初期データ u_0 の大きさを制限せずに，(1)–(2) の解 u に対して， $t \rightarrow \infty$ の時の $\|u(t)\|_{L^\infty}$ の時間減衰と $u(t)$ の漸近形について考える．

長距離型非線型相互作用を伴うシュレディンガー方程式の初期値問題の解の長時間挙動に関する同趣旨の研究は，これまでに，多次元の場合も含めて，小さい初期データについて研究される事が多かった（例えば，非線型項に消散性が無い場合は [1], [2]，非線型項に消散性がある場合は [3], [4], [8] を参照．）

実数 t に対して， $U(t) = e^{it\Delta/2}$ とする．初期条件 $w(0, x) = \psi(x)$ を満たす自由シュレディンガー方程式 (4) の解は， $w(t, x) = (U(t)\psi)(x)$ で与えられる．空間 n 次元に於ける自由解の評価について次が知られている：

$$\begin{aligned}\|U(t)\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \|U(t)\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C|t|^{-n/2}\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (t \neq 0).\end{aligned}\tag{5}$$

$\mathcal{F}\psi$ や $\hat{\psi}$ は ψ の空間変数に関するフーリエ変換を表し，

$$\Sigma = \{\psi \in H^1 : x\psi \in L^2\}, \quad J = J(t) \equiv x + it\partial_x$$

とする .

本研究の主結果は , 以下の通りである ([5]) .

定理 1. $1 < p \leq 3$ とする . $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ は , $\lambda_2 = \text{Im } \lambda < 0$ である複素数とし , 更に ,

$$\frac{p-1}{2\sqrt{p}}|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \quad (6)$$

を満たすとする . $u_0 \in \Sigma$ とする . この時 , 初期値問題 (1)–(2) の解 u で以下を満たすものが唯一つ存在する:

$$\begin{aligned} u &\in C([0, \infty); H^1), \quad Ju \in C([0, \infty); L^2), \\ \|u(t)\|_{H^1} + \|Ju(t)\|_{L^2} &\leq \|u_0\|_{\Sigma}, \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

更に , $\frac{5+\sqrt{33}}{4} < p \leq 3$ ならば , 次の時間減衰評価が成り立つ:

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \begin{cases} C\{(2+t)\log(2+t)\}^{-1/2}, & p = 3 \text{ の時}, \\ C(1+t)^{-1/(p-1)}, & \frac{5+\sqrt{33}}{4} < p < 3 \text{ の時}. \end{cases} \quad (7)$$

注意 1. $\frac{5+\sqrt{33}}{4} < p \leq 3$ の時 , (5) (但し , $n = 1$) と (7) により , (1) の解 u は自由解より速く時間減衰する事が分かる .

定理 2. 定理 1 の仮定が満たされているとし , u は定理 1 で得られた (1)–(2) の解とする . 更に , $\frac{21+\sqrt{177}}{12} < p \leq 3$ とする . この時 , 以下を満たす複素数値関数 $\phi \in L^2 \cap \mathcal{F}^{-1}L^\infty$ と実数値関数 $\eta \in L^\infty$ が存在する .

或る $\tilde{T} \geq 1$ に対して

$$1 + (p-1)|\lambda_2| |\hat{\phi}(\xi)|^{p-1} \int_1^t \tau^{-(p-1)/2} d\tau + \eta(\xi) \geq \frac{1}{2}, \quad (\forall t \geq \tilde{T}, \xi \in \mathbb{R})$$

であり , $t \rightarrow \infty$ の時 , 以下の漸近公式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \left\| u(t, \cdot) - \frac{1}{(it)^{1/2}} \hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right) e^{i|x|^2/2t} e^{-i\lambda A(t, x/t)} \right\|_{L^\infty} &= \begin{cases} o((t \log t)^{-1/2}), & p = 3 \text{ の時}, \\ o(t^{-1/(p-1)}), & p < 3 \text{ の時}, \end{cases} \\ \|u(t) - e^{-i\lambda A(t, -i\partial_x)} U(t) \phi\|_{L^2} &= \begin{cases} o((\log t)^{-1/2}), & p = 3 \text{ の時}, \\ o(t^{-(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2})}), & p < 3 \text{ の時}. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, $t \geq \tilde{T}$ と $\xi \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} A(t, \xi) &= \frac{1}{(p-1)|\lambda_2|} \log \left(1 + (p-1)|\lambda_2| |\hat{\phi}(\xi)|^{p-1} \int_1^t \tau^{-(p-1)/2} d\tau + \eta(\xi) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2|\lambda_2|} \log(1 + 2|\lambda_2| |\hat{\phi}(\xi)|^2 \log t + \eta(\xi)), & p = 3 \text{ の時}, \\ \frac{1}{(p-1)|\lambda_2|} \log \left(1 + \frac{2(p-1)|\lambda_2|}{3-p} |\hat{\phi}(\xi)|^{p-1} (t^{\frac{3-p}{2}} - 1) + \eta(\xi) \right), & \frac{21+\sqrt{177}}{12} < p < 3 \text{ の時} \end{cases} \end{aligned}$$

である.

更に, 次が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^2} = 0.$$

注意 2. 定理 2 の漸近公式で現れる修正因子 $e^{-i\lambda A}$ は, A の定義より, 次の様に表される.

• $p = 3$ の時:

$$e^{-i\lambda A(t, \xi)} = \frac{\exp \left\{ -\frac{i\lambda_1}{2|\lambda_2|} \log(1 + 2|\lambda_2| |\hat{\phi}(\xi)|^2 \log t + \eta(\xi)) \right\}}{\left(1 + 2|\lambda_2| |\hat{\phi}(\xi)|^2 \log t + \eta(\xi) \right)^{1/2}}$$

• $p < 3$ の時:

$$e^{-i\lambda A(t, \xi)} = \frac{\exp \left\{ -\frac{i\lambda_1}{(p-1)|\lambda_2|} \log \left(1 + \frac{2(p-1)|\lambda_2|}{3-p} |\hat{\phi}(\xi)|^{p-1} (t^{(3-p)/2} - 1) + \eta(\xi) \right) \right\}}{\left(1 + \frac{2(p-1)|\lambda_2|}{3-p} |\hat{\phi}(\xi)|^{p-1} (t^{(3-p)/2} - 1) + \eta(\xi) \right)^{1/(p-1)}}$$

参考文献

- [1] N. Hayashi, E. Kaikina and P.I. Naumkin, *Large time behavior of solutions to the generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **5** (1999), 93–106.
- [2] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–645.

- [3] N. Hayashi, P.I. Naumkin and H. Sunagawa, *On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type*, SIAM J. Math. Anal. **40** (2008), 278–291.
- [4] N. Kita and A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations with a subcritical dissipative nonlinearity*, J. Differential Equations **242** (2007), 192–210.
- [5] N. Kita and A. Shimomura, *Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 39–64.
- [6] V.A. Liskevich and M.A. Perelmuter, *Analyticity of submarkovian semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1097–1104.
- [7] N. Okazawa and T. Yokota, *Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p -Laplacian*, J. Differential Equations **182** (2002), 541–576.
- [8] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1407–1423.
- [9] T. Yokota, *Monotonicity and compactness methods applied to the nonlinear Schrödinger and related equations*, Nonlinear analysis and applications, Vol. 1, 2, 939–956, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.