On the life span of the Schrödinger equation with sub-critical power nonlinearity

佐々木 浩宣　（千葉大学大学院理学研究科）

以下に挙げる 1 次元非線型 Schrödinger 方程式に関する初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \dfrac{1}{2}\partial_x^2 u(t,x) = \lambda |u(t,x)|^{p-1} u(t,x), & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varepsilon\varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

の解の life span について考察する．但しここで, $u = u(t,x)$ は複素数値未知関数, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p > 1$ とする．また φ は適当な関数空間に属し, $\varepsilon > 0$ は充分小とする．各 $\varepsilon > 0$ について, 解の life span T_ε を

$$T_\varepsilon = \sup\left\{ T'_\varepsilon \geq 0;\ (1) \text{ は一意な解 } u \in C([0,T'_\varepsilon); H^1(\mathbb{R})) \text{ を持つ} \right\}.$$

と定義する．$H^1(\mathbb{R})$ は通常の Sobolev 空間である．特に $T_\varepsilon = \infty$ の場合は解が時間大域的に解かれることを指し示している．

ここで各 p について, 既存の手法で得られる T_ε の性質を纏める．結果は大きく分けて以下の三ケースに分類できる:

(i) $p > 3$ のとき: 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に於いて（$\varepsilon > 0$ が充分小ならば）$T_\varepsilon = \infty$ となる ([4] 等参照).
$\mathrm{Im}\,\lambda \leq 0$ のとき: 任意の $p > 1$ で,（$\varepsilon > 0$ が充分小ならば）$T_\varepsilon = \infty$ となる．

(ii) $p = 3$, $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ のとき: [5] の結果を直接適用することにより

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \geq \frac{1}{2(\mathrm{Im}\,\lambda) \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2}. \tag{2}$$

を得る．但しここで $\widehat{\varphi}$ は φ の Fourier 変換を表す．

(iii) $p \leq 3$, $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ のとき: [2] より, $p > p_0$, $\mathrm{Im}\,\lambda \geq C\mathrm{Re}\,\lambda$ ならば, $T_\varepsilon < \infty$ が示される．

この分類は散乱問題に於ける臨界指数が $p = 3$ であることと関連がある．実際ケース (i) は small データに於ける短距離散乱の議論から導かれ, (ii) は長距離散乱による修正解の評価に基く．そこで $p < 3$ となる p による冪を劣臨界冪と呼ぶことにする．本講演の目標は劣臨界冪を非線型項とする初期値問題 (1) の解の life span を考察することである. 上述した通り $\mathrm{Im}\lambda < 0$ のときは既に結果が得られているが, 本講演では $\mathrm{Im}\lambda > 0$ の場合を考慮する．今回, $2 \leq p < 3$ について以下の結果が得られた:

定理 ([3])　$2 \leq p < 3$ 且つ $\mathrm{Im}\lambda > 0$ とせよ. φ は

$$x^m \partial_x^l \varphi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \text{for } m = 0, 1, 2, 3 \text{ and } l = 0, 1 \text{ with } m + l \leq 3 \tag{3}$$

を満たすとするとき,

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\frac{2(p-1)}{3-p}} T_\varepsilon \geq \left(\frac{3-p}{2(p-1)(\mathrm{Im}\,\lambda) \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^{p-1}} \right)^{\frac{2}{3-p}} \tag{4}$$

が成り立つ. 但しここで $\frac{1}{0}$ は $+\infty$ と見做す.

注意 1　条件 (3) により $\widehat{\varphi}$ は遠方で 0 に収束する連続関数であることが分かる. ゆえに (4) の右辺は常に（無限大を含む）正の数であることが分かり, 充分小な $\varepsilon > 0$ について或る定数 C が存在し $T_\varepsilon \geq C\varepsilon^{-2(p-1)/(3-p)}$ を満たす.

証明は $p = 3$ のケースに於ける [5] の手法を応用する. この際, 修正解に相当する関数

$$U(t, x) = \frac{\varepsilon \exp(x^2/2t)}{t^{1/2}} V\left(\frac{2}{3-p} t^{\frac{3-p}{2}} B, \frac{x}{t} \right)$$

の評価が主軸となる. ここで $B > 0$ は適当な正数であり, V は主に関数 $|\widehat{\varphi}|^{p-1}$ によって構成されている. 今回考察する $p < 3$ の場合, そのまま適用すると rough な関数 $|\widehat{\varphi}|^{p-1}$ の扱いが困難になる為, 軟化子 $\rho_\delta(x) = \delta^{-1}\rho(\delta^{-1}x)$ $(\delta > 0)$ を用いて $U(t, x)$ を修正する. この場合, 修正前と修正後に於ける $U(t, x)$ の誤差を評価しなければならないが, 各 ε に対して, δ を適切に調整することにより, 再び [5] の手法に乗せることが出来る.

参考文献

[1] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes 10 (2003), Amer. Math. Soc.

[2] N. Kita, in preparation.

[3] H. Sasaki, Advances in Differential Equations 14 (2009), 1021–1039.

[4] W. Strauss, J. Funct. Anal. 41 (1981), 110–133.

[5] H. Sunagawa, Osaka J. Math. 43 (2006), 771–789.