連立非線形消散型波動方程式の臨界指数について

小川 卓克 (東北大・理)
竹田 寛志 (東北大・理・D3)

次の連立非線形消散型波動方程式の初期値問題；

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \Delta u_j + \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} |u_k|^{p_{j,k}}, & t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1 \le j \le m), \\ u_j(0,x) = a_j(x), \quad \partial_t u_j(0,x) = b_j(x), & x \in \mathbb{R}^n \quad (1 \le j \le m) \end{cases}
$$

について考える. ここで, 連立系の成分の個数 m を $m \ge 2$ とし, 非線形項の冪は $p_{j,k} > 1$ または $p_{j,k} = 0$ $(j,k = 1,2,\cdots,m)$ を満たすものとする. 連立系 (1) の非線形項の冪 $\{p_{j,k}\}_{j,k=1}^m$ の変化に応じた, 解の大域的挙動の変化を考察する.
連立系 (1) に対しては $m=2$, $p_{1,1} = p_{2,2} = 0$, $p_{1,2} > 1$, $p_{2,1} > 1$ の場合に, 消散型波動方程式系と熱方程式系の臨界指数の一致が知られている ([1], [4]).
主結果を述べるための記法を導入する.
記法. 非線形項の冪 $p_{j,k}$ で与えられる m 次正方行列 P, m 次単位行列 E_m を以下のように定める:

$$
P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,m} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & \dots & p_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \dots & p_{m,m} \end{pmatrix}, E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.
$$

ベクトル $\vec{\alpha} = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ を, 連立方程式

$$
(P - E_m)\vec{\alpha} = {}^t(1,1,\cdots 1)
$$

の根とする. このとき, 単独方程式や, $m=2$ の連立系 (1) に対する結果 ([4]) を包含する, 以下の結果を得た.

定理 1. ([2]) 空間変数の次元を $n = 1,2,3$ とする. 十分小さい初期データ $(a_j, b_j) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le j \le m)$ に対して, 非線形項の冪が

$$
\det(P - E) \neq 0, \qquad \sum_{k=1}^{m} p_{j,k} > 1 \quad (1 \le j \le m),
$$
$$
0 < \alpha_j < \frac{n}{2} \quad (1 \le j \le m),
$$

を満たせば, 初期値問題 (1) は一意的な時間大域解

$$
u_j(t) \in C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)) \quad (1 \le j \le m)
$$

を持つ.

定理 1 における $\vec{\alpha}$ の仮定が成立しない場合には, 時間大域解が存在しない連立系が存在する; 例えば次の連立非線形消散型波動方程式系を考える.

$$
(2)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = |u_m|^{p_1}, \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n,\\
\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \Delta u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = |u_1|^{p_2}, \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n,\\
\qquad\qquad\vdots\\
\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \Delta u_m + \dfrac{\partial u_m}{\partial t} = |u_{m-1}|^{p_m}, \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n,\\
u_j(0,x) = a_j(x), \quad \dfrac{\partial u_j}{\partial t}(0,x) = b_j(x), \quad x\in\mathbb{R}^n \quad (1\le j\le m).
\end{cases}
$$

定理 2. ([5]) 空間変数の次元を $n \ge 1$ とする. $\max\limits_{1\le j\le m} \alpha_j = \alpha_{j_0}$ とおくとき, 初期データ $(a_j, b_j) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(1\le j\le m)$ が,

$$
\int_{\mathbb{R}^n} a_j(x)dx \ge 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} b_j(x)dx \ge 0 \qquad (1\le j\le m),
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^n} a_{j_0-1}(x)dx > 0, \quad \text{または}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} b_{j_0-1}(x)dx > 0.
$$

を満たし, 非線形項の冪に対しては $p_j > 1$ $(1\le j\le m)$,

$$
\alpha_{j_0}\left(=\max_{1\le j\le m}\alpha_j\right) \ge \frac{n}{2},
$$

が成り立つとき, $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$: 初期値問題 (2) の解は, 有限時間で爆発する.

注意. 定理 1 と定理 2 では対応する非線形熱方程式系の結果 [3], [6] における初期データの非負値性の仮定は必要としない.

References

[1] Escobedo, M., and Herrero, M., J. Differential Equations **89** (1991), p. 176-202.

[2] Ogawa, T., Takeda, H., *Global existence of solutions for a system of nonlinear damped wave equations*, preprint.

[3] Renclawowicz, J., Applicationes Mathematicae, **27**, (2000), no.2, 203-218.

[4] Sun, F., Wang, M., Nonlinear Analysis ; **66** (2007), no. 12, 2889-2910.

[5] Takeda, H., *Global existence and nonexistence of solutions for a system of nonlinear damped wave equations*, to appear.

[6] Umeda, N., Tsukuba J. Math. **27** (2003), no. 1, 31-46.