局所 Hardy 空間と modulation 空間の包含関係について

小林 政晴 (東京理科大学 理学部)

宮地晶彦氏 (東京女子大学), 冨田直人氏 (大阪大学) との共同研究

本講演では, Goldberg ([2]) により導入された局所 Hardy 空間と Feichtinger ([1]) により導入された modulation 空間の包含関係について報告したい. ここで, 局所 Hardy 空間と modulation 空間はそれぞれ次のように定義される函数空間である.

定義 1 (局所 Hardy 空間). 急減少関数 $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ を

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Psi(x)dx = \widehat{\Psi}(0) \neq 0.$$

を満たすように取る. $0 < p < \infty$ に対して, 局所 Hardy 空間 $h^p(\mathbf{R}^n)$ を (擬)-ノルム

$$\|f\|_{h^p} := \Big\| \sup_{0<t<1} \big| f * \Psi_t \big| \Big\|_{L^p}$$

が有限となる緩増加超函数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ 全体と定義する. ただし, $\Psi_t(x) = t^{-n}\Psi(x/t), t > 0$ とする.

注意 2. $h^p(\mathbf{R}^n)$ は, 函数 Ψ の取り方に依らない. $1 < p < \infty$ の場合には, $h^p(\mathbf{R}^n) = L^p(\mathbf{R}^n)$ であり, $h^1(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbf{R}^n)$ となる.

定義 3 (Modulation 空間). 急減少函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ を

$$\operatorname{supp} \varphi \subset [-1,1]^n, \qquad \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \varphi(\xi - k) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n,$$

を満たすようにとる. $0 < p, q \leqq \infty$, $s \in \mathbf{R}$ に対して modulation 空間 $M_s^{p,q}(\mathbf{R}^n)$ を (擬)-ノルム

$$\|f\|_{M_s^{p,q}} := \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \Big(\langle k \rangle^s \|\varphi(D-k)f\|_{L^p} \Big)^q \right)^{1/q},$$

が有限となる緩増加超函数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ 全体と定義する. ただし, $\varphi(D-k)f := (\varphi(\cdot - k)\widehat{f}(\cdot))^\vee, \langle k \rangle := (1+|k|^2)^{1/2}$ とする.

注意 4. $M_s^{p,q}(\mathbf{R}^n)$ は函数 φ の取り方に依らない. 特に, $p = q = 2$ かつ $s = 0$ の場合, $M_0^{2,2}(\mathbf{R}^n) = L^2(\mathbf{R}^n)$ となる.

Modulation 空間と他の函数空間との包含関係の研究は様々あり, (例えば, Gröbner [3], Okoudjou [6], Toft [8], Sugimoto-Tomita [7], Wang-Huang [9]) 特に $1 \leqq p \leqq \infty$ の場合

$$M^{p,\min\{p,p'\}}(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow M^{p,\max\{p,p'\}}(\mathbf{R}^n), \quad 1/p + 1/p' = 1$$

が成り立つことが知られている. ここでは, $p < 1$ の場合の包含関係について調べた. 得られた結果は次である:

定理 5. $0 < p \leqq 1$, $0 < q \leqq \infty$, $s \in \mathbf{R}$ とする．埋め込み $M_s^{p,q}(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow h^p(\mathbf{R}^n)$ が成り立つための必要十分条件は，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことである：
(a) $p \geqq q$ かつ $s \geqq 0$;
(b) $p < q$ かつ $s > n(1/p - 1/q)$.

定理 6. $0 < p \leqq 1$, $0 < q \leqq \infty$, $s \in \mathbf{R}$ とする．埋め込み $h^p(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow M_s^{p,q}(\mathbf{R}^n)$ が成り立つための必要十分条件は，次の (c), (d) のいずれかが成り立つことである：
(c) $p > q$ かつ $s < -n(1/p + 1/q - 1)$;
(b) $p \leq q$ かつ $s \leq -n(1/p + 1/q - 1)$.

References

[1] H.G. Feichtinger, Modulation spaces on locally compact abelian groups, in: M. Krishna, R. Radha and S. Thangavelu (Eds.), Wavelets and their Applications, Chennai, India, Allied Publishers, New Delhi, 2003, pp. 99-140, Updated version of a technical report, University of Vienna, 1983.
[2] D. Goldberg, A local version of real Hardy spaces, Duke Math. J. 46 (1979), 27-42.
[3] P. Gröbner, Banachräume Glatter Funktionen und Zerlegungsmethoden, Thesis, University of Vienna, 1992.
[4] K. Gröchenig, Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhäuser, Boston, 2001.
[5] M. Kobayashi, Modulation spaces $M^{p,q}$ for $0 < p, q \leq \infty$, J. Funct. Spaces Appl. 4 (2006), 329-341.
[6] K. Okoudjou, Embedding of some classical Banach spaces into modulation spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 1639-1647.
[7] M. Sugimoto and N. Tomita, The dilation property of modulation spaces and their inclusion relation with Besov spaces, J. Funct. Anal. 248 (2007), 79-106.
[8] J. Toft, Continuity properties for modulation spaces, with applications to pseudo-differential calculus, I, J. Funct. Anal. 207 (2004), 399-429.
[9] B. Wang and C. Huang, Frequency-uniform decomposition method for the generalized BO, KdV and NLS equations, J. Differential Equations 239 (2007), 213-250.