

等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流

(The mean curvature flow for equifocal submanifolds)

東京理科大学・理学部 小池 直之 (Naoyuki Koike)

§1. 平均曲率流とリッチ流

この節において、平均曲率流およびリッチ流の定義を述べ、それらの短時間における存在性と一意性について説明する。はじめに、ベクトルバンドルの切断に関する発展方程式の解の短時間における存在性と一意性に関する R. S. Hamilton の定理を紹介する。 V をコンパクト多様体 M 上の (C^∞) ベクトルバンドル、 $\Gamma(V)$ を V の (C^∞) 切断の全体、 $E(\cdot: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V))$ を階数 2 の非線形微分作用素、 $DE_f(\cdot: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V))$ を E の $f(\in \Gamma(V))$ における線形化とする。以下、 $\tilde{f}$ は、 $M \times [0, T)$ から V への C^∞ 写像で各 $t(\in [0, T))$ に対し $f_t(\stackrel{\text{def}}{=} f_t(\cdot) := \tilde{f}(\cdot, t))$ が V の切断になるようなものとする。

定理 1([Ha]).

E が次の 3 条件を満たす写像 $L: \Gamma(V) \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W)$ を許すとする：

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet L : \text{各成分に関して高々 1 階の微分作用素} \\ \bullet L \circ (\text{id}_{\Gamma(V)} \times E) \circ \Delta_{\Gamma(V)} : \text{高々 1 階の微分作用素} \\ \bullet \forall f \in \Gamma(V), \\ \quad \sigma(DE_f)|_{N(\sigma(L)) \times N(\sigma(L))} \text{ の各固有値の実部は正} \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{l} W : \text{あるベクトルバンドル, } \Delta_{\Gamma(V)}(\cdot: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V) \times \Gamma(V)) : \text{対角写像,} \\ \text{id}_{\Gamma(V)} : \Gamma(V) \text{ の恒等変換, } \sigma(\cdot) : (\cdot) \text{ の表象, } N(\sigma(L)) : \sigma(L) \text{ の nullity space} \end{array} \right)$$

このとき、各 $f \in \Gamma(V)$ に対し、発展方程式 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = E(f_t)$ の解 $\tilde{f}$ で初期条件 $\tilde{f}(\cdot, 0) = f$ を満たすようなものが短時間において一意的に存在する。

f をコンパクト多様体 M からリーマン多様体 $(N, \tilde{g})$ への (C^∞) はめ込みとし、 $\tilde{f}: M \times [0, T) \rightarrow N$ を、各 $t(\in [0, T))$ に対し $f_t: M \rightarrow N$ $(\stackrel{\text{def}}{=} f_t(x) := \tilde{f}(x, t))$ がはめ込みになり、 $f_0 = f$ となるような C^∞ 写像とする。 g_t を $\tilde{g}$ から f_t によって誘導される計量とし、 H_t を等長はめ込み $f_t: (M_t, g_t) \hookrightarrow (N, \tilde{g})$ の平均曲率ベクトルとする。

定義 $\tilde{f}$ が発展方程式

$$\tilde{f}_* \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(x,t)} \right) = (H_t)_x \quad ((x, t) \in M \times [0, T)) \quad \cdots \quad (\text{MCF})$$

を満たすとき、 $\tilde{f}$ (あるいは、 f_t ($0 \leq t < T$)) を、 f を初期データにもつ平均曲率流とよぶ。ここで、 $\tilde{f}_*$ は、 $\tilde{f}$ の微分を表す。

M の各点 p に対し、 p の十分小さな近傍 U 上で f_t は、自明なベクトルバンドル $U \times \mathbb{R}^m$ ($m := \dim N$) の切断とみなすことができ、定理 1 の 3 つの条件を満たすような写像 L を許すような $U \times \mathbb{R}^m$ のある 2 階の非線形微分作用素 E に対し、 $E(f_t|_U) = H_t|_U$ が成り立つ。それゆえ、定理 1 を用いて、 $f|_U$ を初期データにもつ平均曲率流 f_t^U が短時間で一意的存在することが示される。 f_t^U らを張り合わせて f を初期データにもつ平均曲率流 f_t が構成され、その結果、 f を初期データにもつ平均曲率流が短時間で一意的存在することが示される。

注意 (i) $(N, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^{m+1}, \tilde{g}_0)$ (ユークリッド空間) のとき、(MCF) は次のように書き換えられる：

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \Delta_t f_t$$

ここで、 Δ_t は $f_t^* \tilde{g}_0$ に関するラプラシアンを表す。

(ii) f_t ($0 \leq t < T$) が埋め込みであるとき、 $f_t(M)$ を M_t と表し、 M_t ($0 \leq t < T$) を M_0 を初期データにもつ平均曲率流とよぶ。

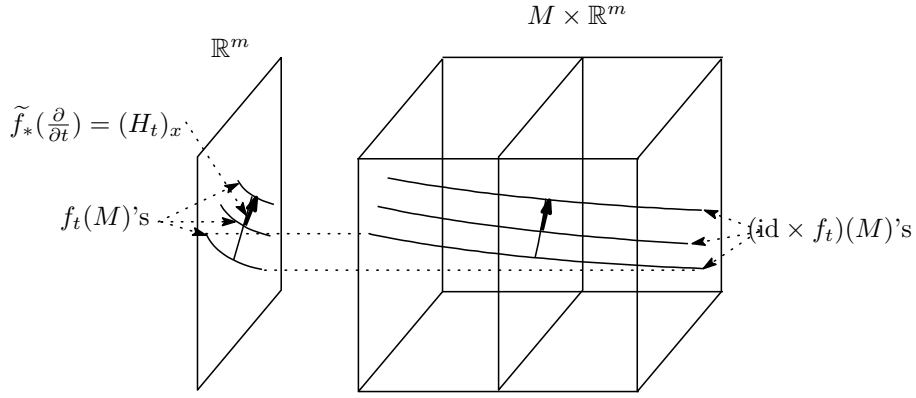


図 1

次に、リッチ流の定義を述べることにする。 g をコンパクト多様体 M のリーマン計量とし、 $G : M \times [0, T) \rightarrow T^*M \otimes T^*M$ ($T = \infty$ の可能性あり) を各 $t \in [0, T)$ に対し、 $g_t : M \rightarrow T^*M \otimes T^*M$ ($\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} g_t(x) := G(x, t)$ ($x \in M$)) が M のリーマン計量になり、 $g_0 = g$ となるような C^∞ 写像とし、 Ric_t を g_t のリッチテンソルとする。

定義 G が発展方程式

$$G_*\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,t)}\right) = -2(\text{Ric}_t)_x \quad ((x, t) \in M \times [0, T)) \quad \cdots \quad (\text{RF})$$

を満たすとき、 G (あるいは、 g_t ($0 \leq t < T$)) を、 g を初期データにもつリッチ流とよぶ。

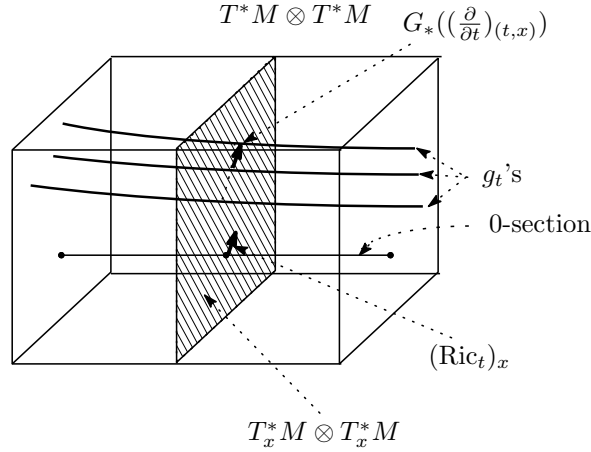


図 2

定理 1 の 3 条件を満たすような写像 L を許すような $T^*M \otimes T^*M$ のある 2 階の非線形微分作用素 E に対し、 $E(g_t) = -2\text{Ric}_t$ が成り立つ。それゆえ、定理 1 を用いて、各リーマン計量 g に対して、それを初期データにもつリッチ流が短時間で一意的存在することが示される。

§2. 概知の事実および今回得た結果

Liu-Terng([LT]) はユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体を初期データにもつ平均曲率流に関して次の事実を得た。

事実 1([LT]) M をユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体とすると、次の事実が成り立つ。

(i) M を初期データにもつ平均曲率流 M_t は有限時間でそのあるフォーカル部分多様体 F に崩壊し、もし M から F への fibration が spherical であるならば、平均曲率流 M_t は type I singularity をもつ。

(ii) M の任意のフォーカル部分多様体 F に対し、 M の平行部分多様体 M' で M' を初期データにもつ平均曲率流 M'_t が有限時間で F に崩壊するようなものが存在する。

また、Liu-Terng([LT]) は次の事実を得た。

事実 2([LT]) M をユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体とし、 $\tilde{C}(\subset T_{x_0}^\perp M)$ を M の点 x_0 における Weyl 群の x_0 を含む基本領域とし、 $C := \exp^\perp(\tilde{C})(:= x_0 + \tilde{C})$ とする。ここで、 $\exp^\perp$ は M の法指数写像を表す。 σ を ∂C (これは単体複体) の 1 次元以上の単体とすると、次の事実が成り立つ。

(i) σ を通る (M の) 任意のフォーカル部分多様体 F を初期データにもつ平均曲率流 F_t は $\partial\sigma$ を通る (M の) あるフォーカル部分多様体 F' に有限時間 (これを T と表す) で崩壊し、もし F から F' への fibration が spherical であるならば、平均曲率流 F_t は type I singularity をもつ。

(ii) $\partial\sigma$ を通る (M の) 任意のフォーカル部分多様体 F に対し、 $\overset{\circ}{\sigma}$ を通る (M の) フォーカル部分多様体 F' で F' を初期データにもつ平均曲率流 F'_t が有限時間で F に崩壊するようなものが存在する。

事実 1,2 の (i) によれば、ユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体は、平均曲率流に沿う崩壊を有限回繰り返した後、1 点に崩壊することがわかる。

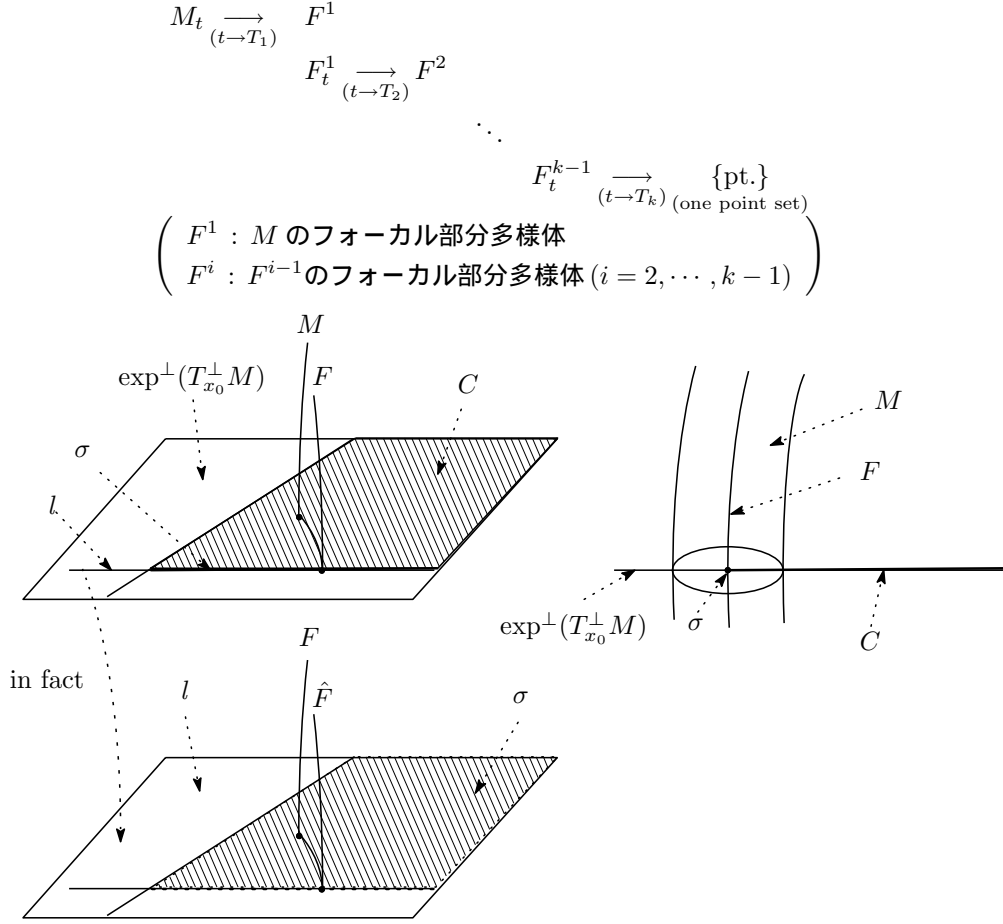


図 3

1995 年、Terng-Thorbergsson([TT]) は、ユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体，球面内の等径超曲面および双曲空間内のコンパクト等径超曲面の一般概念として、対称空間内で等焦部分多様体という概念を定義した。今回、コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流に関して、上述の事実 1 および 2 に類似した次の結果を得た。

定理 A ([K]) M をコンパクト型対称空間 G/K 内の等焦部分多様体とすると、次の事実が成り立つ。

(i) もし M が極小でないならば、 M を初期データにもつ平均曲率流 M_t は有限時間でそのあるフォーカル部分多様体 F に崩壊する。さらに、もし M が既約でその余次元が 2 以上であり、 M から F への fibration が spherical であるならば、平均曲率流 M_t は type I singularity をもつ。

(ii) M の任意のフォーカル部分多様体 F に対し、 M の平行部分多様体 M' で M' を初期データにもつ平均曲率流 M'_t が有限時間で F に崩壊するようなものが存在する。

定理 B([K]) M をコンパクト型対称空間 G/K 内の等焦部分多様体とし、 $\tilde{C}(\subset T_{x_0}^\perp M)$ を M の点 x_0 における Coxeter 群の x_0 を含む基本領域とし、 $C := \exp^\perp(\tilde{C})$ とする。ここで、 $\exp^\perp$ は M の法指数写像を表す。 σ を ∂C (これは stratified space) の 1 次元以上の stratum とする。このとき、次の事実が成り立つ。

(i) σ を通る (M の) 極小でないフォーカル部分多様体 F を初期データにもつ平均曲率流 F_t は $\partial\sigma$ を通る (M の) あるフォーカル部分多様体 F' に有限時間 (これを T と表す) で崩壊する。さらに、もし M が既約でその余次元が 2 以上であり、 F から F' への fibration が spherical であるならば、平均曲率流 F_t は type I singularity をもつ。

(ii) $\partial\sigma$ を通る (M) の任意のフォーカル部分多様体 F に対し、 $\overset{\circ}{\sigma}$ を通る (M) のフォーカル部分多様体 F' で F' を初期データにもつ平均曲率流 F'_t が有限時間で F に収束するようなものが存在する。

定理 A,B の (i) によれば、コンパクト型対称空間 G/K 内の極小でない等焦部分多様体 M は、平均曲率流に沿う崩壊を有限回繰り返した後、 M の極小な等焦部分多様体に崩壊することがわかる。ここで、 ∂C の 0 次元 stratum を通るフォーカル部分多様体は、reflective(それゆえ、極小)であることを注意しておく。

$$\begin{array}{ccc} M_t & \xrightarrow{(t \rightarrow T_1)} & F^1 \\ & & (\text{non-min.}) \\ & & F_t^1 \xrightarrow{(t \rightarrow T_2)} F^2 \\ & & (\text{non-min.}) \\ & & \vdots \\ & & F_t^{k-1} \xrightarrow{(t \rightarrow T_k)} F^k \\ & & (\text{min.}) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} F^1 : M \text{ のフォーカル部分多様体} \\ F^i : F^{i-1} \text{ のフォーカル部分多様体 } (i = 2, \dots, k) \end{array} \right)$$

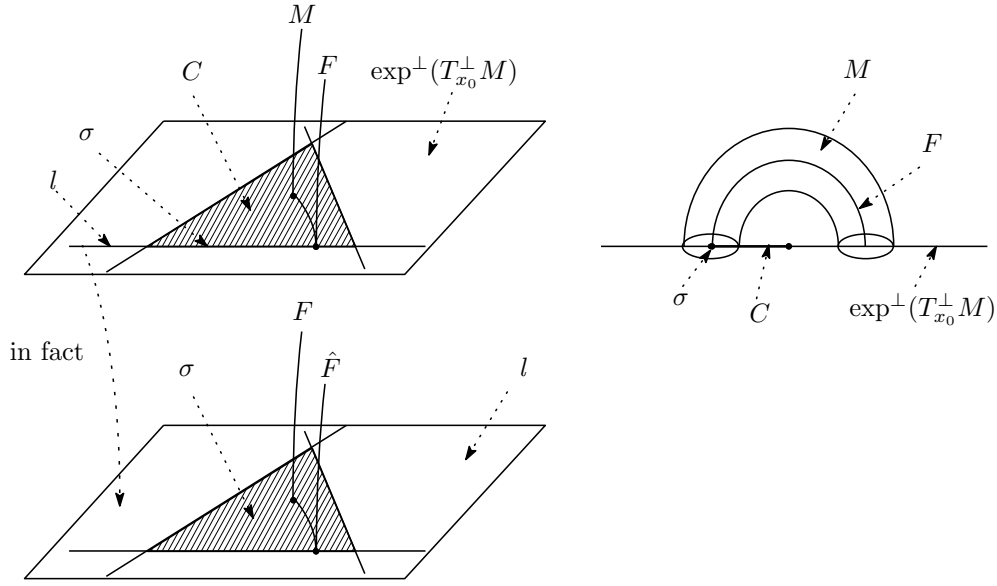


図 4

注意 コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体 M の各平行部分多様体 (これらも等焦部分多様体である) は C と 1 点で交わる。 M の平行部分多様体で極小なものはただ 1 つ存在することが示される。また、 M の各フォーカル部分多様体は ∂C と 1 点で交わる。 ∂C の各 stratum σ に対し、 σ を通る M のフォーカル部分多様体で極小なものはただ 1 つ存在することが示される。

参考文献

- [Ha] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. **17** (1982) 255-306.
- [Hu1] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, J. Differential Geom. **20** (1984) 237-266.
- [Hu2] G. Huisken, Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature, Invent. math. **84** (1986) 463-480.
- [HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley type restriction theorem, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [LT] X. Liu and C. L. Terng, The mean curvature flow for isoparametric submanifolds, Duke Math. J. **147** (2009) 157-179.
- [TT] C.L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces, J. Differential Geometry **42** (1995) 665-718.
- [Z] X. P. Zhu, Lectures on mean curvature flows, Studies in Advanced Math., AMS/IP, 2002.
- [K] N. Koike, Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds, arXiv:math.DG/0908.3086v2.