双線形フーリエマルチプライヤーが有界作用素になるための微分回数について

冨田　直人 (大阪大学大学院 理学研究科)

まずは線形の場合を考えよう．$m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，フーリエマルチプライヤー作用素 $m(D)$ は

$$m(D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} m(\xi) \widehat{f}(\xi)\, d\xi \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

により定義される．ここで，$\widehat{f}$ は f のフーリエ変換，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ はシュワルツの急減少関数空間を表す．線形のフーリエマルチプライヤーに関する基本的な結果として，つぎはよく知られている (例えば，[2, Corollary 8.11] 参照):

<u>Mihlin</u> $1 < p < \infty$ とする．$m \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ が，$|\alpha| \le [n/2]+1$ に対し

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \le C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|} \qquad (\xi \ne 0) \tag{1}$$

を満たしているとする．ここで，$[n/2]$ は $n/2$ の整数部分．このとき，$m(D)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上の有界作用素である．

Mihlin の定理において n が奇数の場合には乱暴ではあるが，線形の場合にはフーリエマルチプライヤーに対し，“(次元の半分) $+ 1$” までの微分評価 (1) があれば有界性が保証されると理解していただきたい.

つぎに，双線形の場合を考えよう．$m \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ に対し，双線形フーリエマルチプライヤー作用素 T_m は

$$T_m(f,g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot(\xi+\eta)} m(\xi,\eta) \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)\, d\xi d\eta \qquad (f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

により定義される．双線形フーリエマルチプライヤーの基本的な結果として, つぎはよく知られている:

<u>Coifman-Meyer ([1])</u> $1 < p,q,r < \infty$, $1/p + 1/q = 1/r$, N を十分大きな自然数とする．$m \in C^N(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\})$ が，$|\alpha| + |\beta| \le N$ に対し

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta m(\xi,\eta)| \le C_{\alpha,\beta}(|\xi| + |\eta|)^{-(|\alpha|+|\beta|)} \qquad ((\xi,\eta) \ne (0,0)) \tag{2}$$

を満たしているとする．このとき，T_m は $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ から $L^r(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素となる．つまり，ある定数 $C > 0$ が存在し

$$\|T_m(f,g)\|_{L^r} \le C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \qquad (f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

[1] の証明では，$4n$ を真に超える微分評価 (2) が要求されているように見える．一方，Grafakos-Torres [3] は特異積分作用素論であらわれる $T1$ 定理を線形から双線形の場合に拡張した．そしてこの双線形 $T1$ 定理を用いると，$(2n+1)$ 回までの微分評価 (2) があれば T_m の有界性が保証される．

しかし $(2n+1)$ 回でも，線形の立場からは多すぎるように見える．実際，双線形の場合，“(次元の半分) $+ 1$” を $(2n)/2 + 1 = n + 1$ と理解するのが自然と思われるので．この講演では，双線形の場合の Hörmander 型の定理を示し，その系として，線形の場合から期待される “(次元の半分) $+ 1$”, つまり $(n+1)$ 回までの微分評価 (2) があれば，双線形フーリエマルチプライヤーの有界性が示せることを報告したい.

References

[1] R.R. Coifman and Y. Meyer, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57 (1978), 1-185.

[2] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[3] L. Grafakos and R. Torres, Multilinear Calderón-Zygmund theory, Adv in Math. 165 (2002), 124-164.