凸領域上での多重バブル解の非存在について

高橋　太　(大阪市立大学・理)
東京理科大学神楽坂解析セミナー講演アブストラクト

この講演は Massimo Grossi 氏（ローマ大学 “La Sapienza”校）との共同研究に基づく。

変分構造を持つ半線形楕円型方程式の境界値問題のうち、『臨界型』と呼ばれる範疇に属するあるタイプの問題に対しては、方程式に含まれるパラメーターが変化するのに応じて、領域上の複数点で爆発または凝集現象を起こす非コンパクトな解の族が存在することが知られている。本講演では、このような特異的な漸近挙動を示す解の族のことを『多重バブル解』の族と呼ぶ。この講演の目的は、方程式の設定された領域が、幾何学的・位相的にもっとも単純と考えられる凸領域の場合に、そのような多重バブル解の族が存在しないことを示すことである。

以下に典型的な結果を挙げる。

定理 1　$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな有界凸領域とし、$\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ を

$$(E_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解の族で $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty$ $(\lambda \to 0)$ をみたすものとする。このとき、領域内の１点 $a \in \Omega$ が存在して

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \int_\Omega e^{u_\lambda} dx = 8\pi, \quad \lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = 8\pi G(\cdot, a) \quad \text{in } C^2_{loc}(\overline{\Omega} \setminus \{a\})$$

が成り立つ。

定理 2　$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな有界凸領域とし、$\{u_p\}$ を

$$(E_p)\begin{cases} -\Delta u = (u_+)^p & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解の族で、条件 $p\int_\Omega (u_+)^{p+1} dx = O(1)$ $(p \to \infty)$ をみたすものとする。このとき、領域内の１点 $a \in \Omega$ が存在して

$$\lim_{p\to\infty} p \int_\Omega (u_+)^p dx = 8\pi\sqrt{e}, \quad \lim_{p\to\infty} p u_p = 8\pi\sqrt{e} G(\cdot, a) \quad \text{in } C^2_{loc}(\overline{\Omega} \setminus \{a\})$$

が成り立つ。

定理 3　$\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 4$ を滑らかな有界凸領域とする。このとき

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}-\varepsilon} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の任意の解の族 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ に対して、領域内の１点 $a\in\Omega$ が存在して

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 dx \rightharpoonup S^{N/2}\delta_a, \quad u_\varepsilon^{\frac{2N}{N-2}} \rightharpoonup S^{N/2}\delta_a$$

が成り立つ。ここに $S=\inf_{u\in H_0^1(\Omega),u\neq 0}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\|u\|^{-2}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}$ は Sobolev 不等式の最良定数である。

以上の定理 1-3 において、$a\in\Omega$ は Robin 関数 R の一意最小点である。

既存の多重バブル解の爆発解析において、もし考える方程式に領域の複数点で爆発・凝集現象を起こす多重バブル解が存在するとき、その多重爆発点の位置は、ある種の「バランス条件」をみたさなければならないことが明らかにされている。

以上の非存在定理は、次の主定理と凸領域上での Robin 関数の狭義凸性 ([1], [2]) を組み合わせることで、多重バブル解が存在するための必要条件である「バランス条件」が、凸領域上では成り立たないことを示すことによって証明される。

主定理 $l\geq 2$ を整数とし、$\Omega^l=\Omega\times\cdots\times\Omega$($l$ 重直積）, $\Delta=\{(\xi_1,\cdots,\xi_l)\in\Omega^l|\xi_i=\xi_j \text{ for some } i\neq j\}$ とおく。定数 $A,B>0$ と 正ベクトル $\Lambda=(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_l)$,（つまり $\Lambda_i>0,\ \forall i$) に対して、関数 $\mathcal{F}_\Lambda:\Omega^l\setminus\Delta\to\mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F}_\Lambda(\xi_1,\cdots,\xi_l)=A\sum_{i=1}^{l}\left(R(\xi_i)+K(\xi_i)\right)\Lambda_i^2-B\sum_{\substack{i\neq j\\1\leq i,j\leq l}}G(\xi_i,\xi_j)\Lambda_i\Lambda_j$$

で定義する。ここに $K\in C^2(\Omega)$ は $R+K$ が Ω で凸関数となるものとする。

さらに Ω は凸領域であるとする。このとき

$$\frac{1}{2}A\left(\nabla R(a_i)+\nabla K(a_i)\right)\Lambda_i^2-B\sum_{j=1,j\neq i}^{l}\nabla_x G(a_i,a_j)\Lambda_i\Lambda_j=\vec{0}\quad(i=1,2,\cdots,l)$$

をみたすような $(a_1,\cdots,a_l)\in\Omega^l\setminus\Delta$ （$\Omega^l\setminus\Delta$ における $\mathcal{F}_\Lambda$ の臨界点）は存在しない。

ここで、$G=G(x,y)$ は斉次 Dirichlet 境界条件付き $-\Delta$ の Green 関数

$$-\Delta_x G(x,y)=\delta_y(x),\ x\in\Omega,\quad G(x,y)=0,\ x\in\partial\Omega$$

をあらわし、

$$R(x)=\lim_{y\to x}\left[\Gamma(x,y)-G(x,y)\right]$$

は Green 関数に付随する Robin 関数とする。ただし

$$\Gamma(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\log|x-y|^{-1}, & (N=2),\\ \frac{1}{(N-2)\sigma_N}|x-y|^{2-N}, & (N\geq 3)\end{cases}$$

は $-\Delta$ の基本解で、σ_N は $(N-1)$ 次元球面の体積とする。

この主定理自身は、次の Green 関数に対する恒等式から容易に得られる。

補題

$P \in \mathbb{R}^N$, $a, b \in \Omega, a \neq b$ を任意の点とする。このとき次が成り立つ。

$$\int_{\partial\Omega} (x - P) \cdot \nu(x) \left(\frac{\partial G(x,a)}{\partial \nu_x} \right) \left(\frac{\partial G(x,b)}{\partial \nu_x} \right) ds_x$$
$$= (2 - N) G(a,b) + (P - a) \cdot \nabla_x G(a,b) + (P - b) \cdot \nabla_x G(b,a),$$

ここで $\nu(x)$ は $x \in \partial\Omega$ における単位外法線ベクトルである。

参考文献

[1] L. A. Caffarelli, and A. Friedman: *Convexity of solutions of semilinear elliptic equations,* Duke Math. J. **52**(2) (1985) 431-456.

[2] P. Cardaliaguet, and R. Tahraoui: *On the strict concavity of the harmonic radius in dimension $N \geq 3$,* J. Math. Pures Appl. **81**(9) (2002) 223-240.

[3] M. Grossi, and F. Takahashi: *Nonexistence of multi-bubble solutions to some elliptic equations on convex domains,* to appear in JFA