Endpoint Strichartz and microlocal dispersive estimates for Schrödinger equations on scattering manifolds

水谷 治哉

東京大学大学院数理科学研究科

2010 年 10 月 23 日

波動方程式や Schrödinger 方程式等の線形分散型方程式に対する Strichartz 評価は, 非線形方程式の解析 (例えば, Cauchy 問題の適切性や散乱問題など) の基本的な道具であることがよく知られており, 現在でも研究が盛んに行われている. また, Bourgain (1993) 以来, 多様体上での Strichartz 評価についても多くの結果がこれまでに得られている (例えば, [1] の参考文献を見よ). 特に散乱多様体上の Schrödinger 方程式の場合は, 端点評価を除いて [2] によって証明されている. 本講演では彼らの結果を端点まで拡張するとともに, 解の超局所的な性質と Strichartz 評価との関係について考察する.

散乱多様体とは R. Melrose (1994) によって導入された境界付きコンパクト多様体の一クラスであるが, ここではユークリッド空間の極座標表示の一般化として定式化する.

Definition 1 (散乱多様体, 散乱計量)**.** $d \geq 2$ とする. M をコンパクトでない滑らかな d 次元完備リーマン多様体として, 次の分解 (boundary decomposition) を仮定する:

$$M = M_c \cup M_\infty, \quad M_c \Subset M, \quad M_\infty \cong (0,\infty) \times \partial M \ni (r,\theta), \quad M_c \cap M_\infty \subset (0,1) \times \partial M.$$

ここで, ∂M は任意の $d-1$ 次元閉多様体である. $(1,\infty) \times \partial M$ を散乱領域と呼ぶ.

次に, g を M 上のリーマン計量で以下をみたすものとする: $(r,\theta) \in (1,\infty) \times \partial M$ に対して,

$$g = dr^2 + r^2 \sum_{j,k=1}^{d-1} \left(h_{jk}(\theta) + a_{jk}(r,\theta)\right) d\theta^j d\theta^k.$$

ここで, (h_{jk}) は ∂M 上のリーマン計量, (a_{jk}) は各成分が滑らかな実数値関数で, ある $\mu > 0$ が存在して, 任意の $(l,\alpha) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+^{d-1}$ に対して,

$$|\partial_r^l \partial_\theta^\alpha a_{jk}(r,\theta)| \leq C_{l\alpha} r^{-\mu-l}, \quad (r,\theta) \in (1,\infty) \times \partial M, \quad (\text{長距離型摂動})$$

をみたすと仮定する. 上記をみたす g を (長距離型) 散乱計量, (M,g) を (長距離型) 散乱多様体と言う.

定義から, 散乱計量 g は $r \to +\infty$ である錐型計量に漸近する. 散乱多様体の例としては, $M = \mathbb{R}^d$, $\partial M = S^{d-1}$ とすれば散乱多様体は漸近的ユークリッド空間の極座標表示と同型になる. (stereographic projection を使う.)

散乱多様体 (M,g) 上の Schrödinger 方程式を考える:

$$i\partial_t u(t,z) = Pu(t,z),\ (t,z) \in \mathbb{R} \times M; \quad u(0,z) = u_0(z) \in L^2(M).$$

ここで, $L^2(M) := L^2(M, G(z)dz)$, $P = -\frac{1}{2}\Delta_g$, Δ_g は Laplace-Beltrami 作用素である:

$$\Delta_g = \frac{1}{G(z)} \sum_{l,m=1}^{d} \partial_{z_l} G(z) g^{lm}(z) \partial_{z_m}, \quad (g^{lm}(z)) = (g_{lm}(z))^{-1}, \quad G(z) = \sqrt{\det g_{lm}(z)}.$$

このとき, P は C_0^∞ 上本質的自己共役であり, 方程式の解は $u(t) = e^{-itP}u_0$ で与えられる. 上記の設定の下で次の結果を得た.

Theorem 2 (散乱領域上の Strichartz 評価)**.** *ある十分大きなコンパクト集合 $K \subset M$ と $\chi_K \in C_0^\infty(M)$ with $\chi_K \equiv 1$ on K が存在して, 任意の $T > 0$ と以下をみたす実数の組 (p,q)*

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad p,q \geq 2, \quad (d,p,q) \neq (2,2,\infty), \quad \text{(admissible condition)}$$

に対して, 定数 $C = C(K,T,p,q) > 0$ が存在して,

$$||(1-\chi_K)e^{-itP}u_0||_{L^p([-T,T];L^q(M))} \leq C||u_0||_{L^2(M)}, \quad u_0 \in C_0^\infty(M).$$

Remark 3. Theorem 2 では M の非捕捉性を仮定していない. つまり, (少なくとも散乱多様体の場合には) 遠方での時間局所 Strichartz 評価は多様体のコンパクトな部分の構造には依らないことがわかる. K 上の評価は右辺の L^2 ノルムを $H^{\frac{1}{p}}$ ノルムに変えれば非捕捉性を仮定せずに証明できる. また, 非捕捉性を仮定すれば全空間で微分のロスがない Strichartz 評価を証明することができる.

定理の証明は局所化, 近似解の構成, 分散型評価の証明の 3 つに分けられる. 基本的には [1] の方法を用いるが, 先行結果とは局所化の部分が本質的に異なる. これまでは, 例えば Littlewood-Paley 分解などを用いて周波数のみを局所化していたが, 我々の問題の場合, それだけでは時間発展作用素に対するパラメトリックスの構成に必要な Fourier 積分作用素がうまく定義できないことがわかる. そこで, さらに空間も局所化することで, これを回避する. 解の近似には磯崎-北田パラメトリックス, WKB パラメトリックスおよび Egolov の定理の 3 種類をそれぞれ異なる空間で用いる. 最終的には Keel-Tao の定理を用いることで, Strichartz 評価は超局所分散型評価に帰着される.

時間が許せば, より一般的な散乱計量を考えた場合や実数値ポテンシャルを摂動した場合についても紹介したいと考えている.

References

[1] J.- M. Bouclet, *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds.* to appear in Analysis and PDE.

[2] A. Hassell, T. Tao, J. Wunsch, *Sharp Strichartz estimates on non-trapping asymptotically conic manifolds.* Amer. J. Math. **128** (2006), 963–1024.