複素 Ginzburg-Landau 型方程式の初期値問題に対するコンパクト性の方法

田村　博志　(東京理科大学・理 D3)
Philippe Clément　(デルフト工大)
岡沢　登　(東京理科大学・理)
横田　智巳　(東京理科大学・理)

$N \in \mathbb{N}$ とする. 次の複素 Ginzburg-Landau 型方程式に対する初期値問題

(CGLT)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\lambda + i\alpha)(-\Delta u + (b^2|x|^2 + c)u) + (\kappa + i\beta)|u|^{q-2}u = 0 & \text{on } (0,\infty)\times\mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

の大域的可解性を考える. ここに $\lambda, \kappa > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, b, $c > 0$, $q \geq 2$ は定数, $i = \sqrt{-1}$, $u = u(t,x)$ は $[0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ 上の未知の複素数値関数である.

特に, $b = c = 0$ のとき (CGLT) は複素 Ginzburg-Landau 方程式に対する初期値境界値問題

$$\text{(CGL)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (\kappa + i\beta)|u|^{q-2}u - \gamma u = 0 & \text{on } (0,\infty)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

において $\gamma = 0$, $\Omega = \mathbb{R}^N$ としたものである. (CGL) には多くの先行研究がある ([**2**] 参照). 定数 $c_q \geq 0$ を次で定める:

$$c_q := \frac{q-2}{2\sqrt{q-1}}.$$

$|\beta|/\kappa < 1/c_q$ のとき $u \mapsto -(\lambda + i\alpha)\Delta u + (\kappa + i\beta)|u|^{q-2}u$ が $L^2(\Omega)$ で極大単調であることを用いて (CGL) の可解性が示される. よって極大単調性がない場合の (CGL) の可解性が問題となる. Ω が有界のとき $(-\Delta + 1)^{-1}$ が $L^2(\Omega)$ でコンパクトであることを用いて (CGL) の可解性が示されるが, $\Omega = \mathbb{R}^N$ のときこの方法は適用できない. しかし調和振動子 $|x|^2$ の摂動を考えることで $(-\Delta + |x|^2 + 1)^{-1}$ のコンパクト性を得る ([**1**] 参照). ゆえに (CGLT) を考えることが (CGL) の可解性を示すために有効であると予想できる. 今回 b, $c > 0$ は固定して (CGLT) についての結果だけを述べるが, 将来的には b, $c \to 0$ としたときの (CGLT) の挙動を明らかにすることが念頭にある.

定理を述べるために次の CGL 領域 ([**2**] 参照) を定義する:

$$\mathrm{CGL}(1/c_q) := \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy\ge 0 \text{ or } \frac{|xy|-1}{|x|+|y|}<\frac{1}{c_q}\Big\}.$$

次の定理を得る.

定理. $N\in\mathbb{N}$, $\lambda,\kappa>0$ とする.

$$(\alpha/\lambda,\beta/\kappa)\in\mathrm{CGL}(1/c_q).$$

を仮定する.

(**i**) $q\ge 2$ とする. このとき任意の $u_0\in H^1(\mathbb{R}^N)\cap D(|x|)\cap L^q(\mathbb{R}^N)$ に対して 初期値問題 (CGLT) の大域的強解 $u(\cdot)$ が存在し次をみたす:

$$\begin{aligned}
&u(\cdot)\in C([0,\infty);H^1(\mathbb{R}^N)\cap D(|x|)\cap L^q(\mathbb{R}^N)),\\
&u(\cdot)\in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^N)\cap D(|x|^2))\cap L^{2(q-1)}(0,T;L^{2(q-1)}(\mathbb{R}^N))\quad \forall T>0,\\
&(\partial u/\partial t)(\cdot)\in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^N))\quad \forall T>0.
\end{aligned}$$

さらに $u(\cdot)$ は次の評価をみたす:

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{L^2}\le\|u_0\|_{L^2},\\
&\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+b^2\big\||x|u(t)\big\|_{L^2}^2+\|u(t)\|_{L^q}^q\le C(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+b^2\big\||x|u_0\big\|_{L^2}^2+\|u_0\|_{L^q}^q).
\end{aligned}$$

ここに C は $\lambda+i\alpha$, $\kappa+i\beta$, q, b, c のみに依存する定数である.

(**ii**) $2\le q<2^*$ とする. ここに $N\le 2$ のとき $2^*:=\infty$, $N\ge 3$ のとき $2^*:=2N/(N-2)$ とする. このとき初期値に対する連続依存性を得る:

$$\|w(t)\|_{L^2}^2+\lambda\int_0^t e^{K(t-s)}(\|\nabla w(s)\|_{L^2}^2+b^2\big\||x|w(s)\big\|_{L^2}^2)\,ds\le e^{Kt}\|w_0\|_{L^2}^2.$$

ここに $w(t):=u(t)-v(t)$, $w_0:=u_0-v_0$ で u, v はそれぞれ初期値 $u_0,v_0\in H^1(\mathbb{R}^N)\cap D(|x|)\cap L^q(\mathbb{R}^N)$ に対する (CGLT) の大域的強解, K は $\lambda+i\alpha$, $\kappa+i\beta$, q, b, c, u_0, v_0 にのみ依存する定数である. ゆえに (CGLT) の一意可解性を得る.

参考文献

[1] N. Okazawa, *An L^p theory for Schrödinger operators with nonnegative potentials*, J. Math. Soc. Japan, **34**, (1984), 675–688.

[2] N. Okazawa and T. Yokota, *Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p-Laplacian*, J. Differential Equations **182** (2002), 541–576.