

Remarks on the critical Besov space and its embedding into weighted Besov-Orlicz spaces

和田出秀光 (大阪市立大学 数学研究所)

臨界 Besov 空間 $B_p^{\frac{n}{p}, \rho}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, \rho \leq \infty$ ($\rho \neq 1$), は臨界 Sobolev 空間 $H_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, と同様に連続関数の空間への埋め込みが成り立たないという意味で臨界に位置する関数空間である. 本講演では, 臨界 Besov 空間を特徴付ける Gagliardo-Nirenberg (GN) 型不等式を重み付き補間不等式として導出する. 更に, 対応する Trudinger 型不等式を重み付き Besov-Orlicz 空間への連続埋め込みとして表現する.

Ozawa [4] において, 分数階微分を含む臨界 Sobolev 空間 $H_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ 上の GN 型不等式が導出された:

$$\|u\|_{L_q} \leq C_{n,p} q^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L_p}^{\frac{p}{q}} \|(-\Delta)^{\frac{n}{2p}} u\|_{L_p}^{1-\frac{p}{q}}, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \quad (1)$$

ここに, $p \leq \forall q < \infty$ であり, $q \rightarrow \infty$ のおける発散指数 $q^{\frac{1}{p'}}$ は最適である. 本来, 不等式 (1) における特別なケース $p = 2$, i.e., $H_2^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ の場合, 同不等式は Ogawa [2], Ogawa-Ozawa [3] によって示されている. 更に, 不等式 (1) は Nagayasu-W. [1] により次の重み付き不等式に一般化された:

$$\|u\|_{L_{q,w_r}} \leq C_{n,p} \left(\frac{1}{n-r} \right)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p'}} q^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L_p}^{\frac{(n-r)p}{nq}} \|(-\Delta)^{\frac{n}{2p}} u\|_{L_p}^{1-\frac{(n-r)p}{nq}}. \quad (2)$$

ここに, $0 \leq \forall r < n$ 及び $\tilde{p} \leq \forall q < \infty$ であり, $\tilde{p} \in (p, \infty)$ は n, p により定まるある指数である. さらに同論文では, 2 種の臨界指数 $r = n$ 及び $q = \infty$ における発散指数はどちらも最適であることが示された. 不等式 (2) の左辺において $L_{q,w_r}(\mathbb{R}^n)$ は重み付き Lebesgue 空間であり, ここの重み w_r は斉次関数 $w_r(x) := \frac{1}{|x|^r}$ を採用する.

本講演の主要な目的の 1 つは, (GN) 型不等式 (1), (2) を臨界 Besov 空間 $B_p^{\frac{n}{p}, \rho}(\mathbb{R}^n)$ に対する不等式に一般化することであり, 実際, 次の不等式を得た:

定理 1.

$$\|u\|_{\dot{B}_{q,w_r}^{0,\nu}} \leq C_n \left(\frac{1}{r} \right)^{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\rho_1}} \left(\frac{1}{n-r} \right)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\rho_2}} q^{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\max\{\rho_1, \rho_2\}}} \|u\|_{\dot{B}_p^{0,\rho_1}}^{\frac{(n-r)p}{nq}} \|u\|_{\dot{B}_p^{\frac{n}{p}, \rho_2}}^{1-\frac{(n-r)p}{nq}}. \quad (3)$$

ここに, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < r < n$, $1 \leq \nu \leq \min\{\rho_1, \rho_2\} \leq \infty$ であり, $\dot{B}$ は斉次 (重み付き) Besov 空間を表す.

一般に, 臨界ケース $r = 0$ 及び $q = \infty$ の場合, 不等式 (3) は成立しない (特に $\nu = \rho_1, \nu = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ のとき, それぞれ $r = 0, q = \infty$ とすることが可能). 一方, もう一つの臨界ケース $r = n$ のとき, 不等式 (3) は常に成立しないことが分かる. しかしながら, $r = n$ の場合, 即ち重み関数が $\frac{1}{|x|^n}$ となる場合, 対数関数を補助関数として原点付近での特異性を緩和することにより, 同臨界ケースを成立させることが可能となる. 実際, 次の不等式が成立する:

定理 2.

$$\|u\|_{B_{p,W_s}^{0,\rho}} \leq C_{n,p,s} \|u\|_{B_p^{\frac{n}{p},\rho}}, \quad \text{ここに, } W_s(x) = \frac{1}{|x|^n \left[\log(e + \frac{1}{|x|}) \right]^s}, \quad s > 1,$$

$$n \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty, 1 \leq \rho \leq \infty.$$

最後に不等式 (3) の臨界ケース $q = \infty$ に位置する不等式の導出を試みる. 例えば, 不等式 (1) の場合, Ozawa [4] により次の Trudinger 型埋め込みが示された:

$$H_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{\Phi_1}(\mathbb{R}^n), \quad \Phi_1(t) = \exp(t^{p'}) - \sum_{k=0}^{k_1-1} \frac{t^{p'k}}{k!}, \quad k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid p'k \geq p\}.$$

$L_{\Phi_1}(\mathbb{R}^n)$ は指数型関数 Φ_1 を Young 関数に持つ Orlicz 空間である. 同様に, 不等式 (2) に対応する Trudinger 型埋め込みとして次が成立する (Nagayasu-W. [1]):

$$H_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{\Phi_2, w_r}(\mathbb{R}^n), \quad \Phi_2(t) = \exp(t^{p'}) - \sum_{k=0}^{k_2-1} \frac{t^{p'k}}{k!}, \quad k_2 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid p'k \geq \tilde{p}\}.$$

$L_{\Phi_2, w_r}(\mathbb{R}^n)$ は Φ_2 を Young 関数に持ち, w_r を重み関数とする重み付き Orlicz 空間である. 上記の結果を踏まえ, 不等式 (3) に対応する Trudinger 型評価を導出する. 実際, 重み付き Besov-Orlicz 空間を用いて次の不等式が成立する:

定理 3.

$$B_p^{\frac{n}{p},\rho}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{\Phi_0, w_r}^{0,\nu}(\mathbb{R}^n), \quad \Phi_0(t) = \exp(t^{\mu-\delta}) - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{t^{(\mu-\delta)k}}{k!},$$

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid (\mu - \delta)k \geq p\},$$

$$n \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty, 0 \leq r < n, 1 \leq \nu < \rho < \infty, \mu = \frac{\rho\nu}{\rho-\nu}, 0 < \delta \leq \mu - 1.$$

• 参考文献

- [1] S.Nagayasu, H.Wadade, *Characterization of the critical Sobolev space on the optimal singularity at the origin*, J.Funct.Anal. **258** (2010), 3725–3757.
- [2] T.Ogawa, *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinear Anal. **14** (1990), 765–769.
- [3] T.Ogawa, T.Ozawa, *Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrödinger mixed problem*, J.Math.Anal.Appl. **155** (1991), 531–540.
- [4] T.Ozawa, *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J.Funct.Anal. **127** (1995), 259–269.