荷電粒子の密度解析に由来する
移流拡散方程式の解の時間大域挙動について

山本 征法　(東北大学大学院理学研究科)*

1. 導入

ここでは, $n \geq 3$ として, 次の移流拡散方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = -u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & \quad\quad\ \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

移流拡散方程式は半導体素子の設計問題に由来する方程式であり, 未知函数 u は電荷の密度を表し, ψ は静電場のポテンシャルを表す. この初期値問題については大きな初期値に対する時間大域解の存在が既に示されている. さらに, 解は $t \to \infty$ で熱核に近づく ([4]). ここではさらに, 解の高次漸近展開を考える.

移流拡散方程式に似た非線形構造をもつ非線形拡散方程式として, Navier-Stokes 方程式, Keller-Segel 方程式などがある. Navier-Stokes 方程式については, 解の高次漸近形が同定されている ([1, 2]). Keller-Segel 方程式については, 解の高次漸近展開に Navier-Stokes 方程式の場合には見られない補正項が現れることが知られている. さらに, 空間次元が偶数の場合にのみ, 解の漸近展開に対数函数のオーダーで減衰する項が現れることが示されている ([3, 5, 7]). 移流拡散方程式の解についても, 高次漸近展開に補正項が現れる ([6]). この補正項は, 方程式の非線形項に解の低階の近似を繰り込むことによって得られる. ここでは, 空間次元が偶数の場合と奇数の場合とで, 解の高次漸近展開が大きく異なることを見る. 初期値問題 (1) を解析するために, 次の積分方程式を導入する:

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot \left(u \nabla (-\Delta)^{-1} u \right)(s) ds, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

ただし $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ は熱半群であり, 作用素 $(-\Delta)^{-1}$ は次で与えられる:

$$(-\Delta)^{-1} \varphi := ((n-2)|S_n|)^{-1} |x|^{-(n-2)} * \varphi, \quad \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 < p < n/2.$$

ここで, $|S_n|$ は $(n-1)$ 次元単位球の表面積である. 積分方程式 (2) の解を初期値問題 (1) の mild solution と呼ぶ.

2. 主結果

重みつき L^1 空間を $L^1_2(\mathbb{R}^n) := L^1(\mathbb{R}^n; (1 + |x|^2)dx)$ で定め, $u_0 \in L^1_2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, 0 次と 1 次のモーメントを $M := \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) dy \in \mathbb{R}$, $m :=$

* 〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉 6 番 3 号
e-mail: sa5m27@math.tohoku.ac.jp

$-\int_{\mathbb{R}^n} yu_0(y)dy \in \mathbb{R}^n$ とおく. さらに, $n=3$ のとき, 次の函数を導入する:

$$J(t,x) := \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}\cdot(G\nabla(-\Delta)^{-1}G)(s)ds, \quad K(t,x) := C_K\log(1+t)\Delta G(t,x),$$

$$C_K := -\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} y\cdot\big(G\nabla(-\Delta)^{-1}J + J\nabla(-\Delta)^{-1}G\big)(1,y)dy.$$

ただし, $G=G(t,x)$ は熱核である. このとき, $J(t)$ が $\nabla G(t)$ と同じスケーリングをもつことが分かる. $n=4$ のときは, 次の函数を導入する:

$$\tilde{K}(t,x) := C_{\tilde{K}}\log(1+t)\Delta G(t,x), \quad C_{\tilde{K}} := -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} y\cdot(G\nabla(-\Delta)^{-1}G)(1,y)dy.$$

以上で定めた函数と, 初期値問題 (1) の解について, 次の定理が成り立つ:

定理 1 ([8, 9]) $n=3,\ u_0 \in L^1_2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ とし, u を (1) の解とすると, $1\le p\le\infty$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\left\|u(t)-MG(t)-m\cdot\nabla G(t)-M^2J(t)-M^3K(t)\right\|_p\\ &= O\left(t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-1}\right) \quad (t\to\infty).\end{aligned}$$

定理 2 ([9]) $n=4,\ u_0 \in L^1_2(\mathbb{R}^4)\cap L^\infty(\mathbb{R}^4)$ とする. このとき, u を (1) の解として, $1\le p\le\infty$ に対して次が成り立つ:

$$\left\|u(t)-MG(t)-m\cdot\nabla G(t)-M^2\tilde{K}(t)\right\|_p = O\left(t^{-2\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\right) \quad (t\to\infty).$$

これらの定理により, 空間次元が 3 の場合も 4 の場合も, 解の漸近展開の $\Delta G(t)$ のオーダーに初めて対数函数の項が現れることが分かる. 一般の空間次元の場合の解は, 次の漸近構造をもつ:

- n が偶数の場合, $D^{n-2}G(t)$ のオーダーに初めて対数函数の項が現れる.
- n が奇数の場合, $D^{2(n-2)}G(t)$ のオーダーに初めて対数函数の項が現れる.

参考文献

[1] Carpio, A., SIAM J., Math. Anal., **27** (1996), 449-475.
[2] Fujigaki, Y., Miyakawa, T., SIAM J. Math. Anal., **33** (2001), 523-544.
[3] Kato, M., Differential Integral Equations, **22** (2009), 35-51.
[4] Kawashima, S., Kobayashi, R., Funkcial. Ekvac., **51** (2008), 371-394.
[5] Nagai, T., Yamada, T., J. Math. Anal. Appl., **336** (2007), 704-726.
[6] Ogawa, T., Yamamoto, M., Math. Models Methods Appl. Sci., **19** (2009), 939-967.
[7] Yamada, T., Hiroshima Math. J., **39** (2009), 363-420.
[8] Yamamoto, M., RIMS Kôkyûroku bessatsu, **B15** (2009), 189-208.
[9] Yamamoto, M., J. Math. Anal. Appl., **369** (2010), 144-163.