臨界型 Sobolev の埋め込みと関連する半線形熱方程式の大域解の存在

猪奥 倫左 (東北大学大学院理学研究科 D3)

本講演では、次の半線形熱方程式の初期値問題について考察する。

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

ここでは指数増大する非線形項

$$(2) \quad f(u) = u|u|^{\frac{4}{n}}e^{u^2}$$

について考察する。非線形項が多項式の場合には Weissler による次の結果が知られている。

命題 1 (Weissler [5]) 非線形項を $f(u) = |u|^{p-1}u$ とし、 $q > 1$ とする。このとき $p = p_h := 1 + \frac{2q}{n}$ ならば、ある十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ が存在して任意の $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_0$ に対して (1) の大域解 $u \in C([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^n))$ が存在する。

Schrödinger 方程式に対しても大域解の存在定理が知られている。

$$(3) \quad \begin{cases} iu_t + \Delta u = f(u), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

ここで $u(t, x) : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ である。Cazenave-Weissler [1] は非線形項が多項式の場合に (3) の大域解の存在を示した。

命題 2 (Cazenave-Weissler [1]) 非線形項を $f(u) = |u|^{p-1}u$ とし、 $0 \leq s < \frac{n}{2}$ とする。このとき $p = p_s := 1 + \frac{4}{n-2s}$ ならば、ある十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ が存在して任意の $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_0$ に対して (3) の大域解 $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbb{R}^n))$ が存在する。

さらに Cazenave-Weissler は [1] において熱方程式の L^q 理論と Schrödinger 方程式の H^s 理論の関係について言及した。即ち、大域存在が成り立つ非線形項の指数が等しいとき、

$$p_h = p_s \iff \frac{2q}{n} = \frac{4}{n-2s} \iff \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{s}{n}$$

が成り立つ。最後の関係式は Sobolev の埋め込み $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ の関係式を表しているため、二つの大域存在の結果には初期値の空間に Sobolev の埋め込みの関係がある事がわかる。

一方、命題 2 において形式的に $s = \frac{n}{2}$ とすると、 $p_s = \infty$ となる。そのため、どのような多項式冪よりも強い増大度をもつ非線形項に対して大域解の存在証明が可能であると予想できる。実際、Nakamura-Ozawa [3] はより指数増大する非線形項に対する $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ での大域存在を示した。

命題 3 (Nakamura-Ozawa [3]) 非線形項を

$$f(u) = \begin{cases} e^{u^2} - 1, & n \geq 4, \\ u(e^{u^2} - 1), & n = 2, 3, \\ u(e^{u^2} - 1 - u^2), & n = 1, \end{cases}$$

とする．このとき，ある十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ が存在して任意の $u_0 \in H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $\|u_0\|_{H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_0$ に対して (3) の大域解 $u \in C([0, \infty); H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n))$ が存在する．

この結果に対して，Ruf-Terraneo は Cazenave-Weissler によって指摘された関係を当てはめ，Sobolev の埋め込みにより対応する空間において初期値問題 (1)-(2) が解けると予想した．ここでの対応する空間とは Orlicz 空間 $\exp L^2(\mathbb{R}^n)$ であり，次で定義される．

$$\exp L^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}; \text{ある } \lambda > 0 \text{ に対して } \int_{\mathbb{R}^n} \left(\exp \left(\frac{|u(x)|}{\lambda} \right)^2 - 1 \right) dx < \infty \right\},$$

$$\|u\|_{\exp L^2(\mathbb{R}^n)} := \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\mathbb{R}^n} \left(\exp \left(\frac{|u(x)|}{\lambda} \right)^2 - 1 \right) dx \leq 1 \right\}.$$

実際， $\exp L^2(\mathbb{R}^n)$ は次を満たす．

$$H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \exp L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad (2 \leq q < \infty).$$

第一の埋め込みは Trudinger-Moser の不等式から，第二の埋め込みは $e^{u^2} - 1$ を Taylor 展開することによりわかる．Ruf-Terraneo による予想は小さい初期値に対する大域解の存在に関するものであったが，彼らは小さい初期値に対する局所解の存在を示した．

命題 4 (Ruf-Terraneo [4]) ある十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ が存在して任意の $u_0 \in \exp L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|u_0\|_{\exp L^2(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_0$ に対して，ある $T = T(u_0) > 0$ と (1)-(2) の局所解 $u \in L^\infty(0, T; \exp L^2(\mathbb{R}^n))$ が存在する．

本講演では，小さな初期値に対する“大域解の存在”を示す．

定理 5 ある十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ が存在して任意の $u_0 \in \exp L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|u_0\|_{\exp L^2(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_0$ に対して，(1)-(2) の大域解 $u \in L^\infty(0, \infty; \exp L^2(\mathbb{R}^n))$ が存在する．

ここで，初期値への連続性は $\exp L^2(\mathbb{R}^n)$ の位相では成り立たないことに注意する．即ち，ある初期値 $u_0 \in \exp L^2(\mathbb{R}^n)$ とある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $t > 0$ に対して

$$\|u(t) - u_0\|_{\exp L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C$$

が成り立つ．初期値への連続性は次の二つの意味で成り立つ．

$$w^* \text{-} \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t) - u_0\|_{\exp L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad \text{かつ} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t) - e^{t\Delta} u_0\|_{\exp L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

参考文献

- [1] Cazenave, T., Weissler, F., B., *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s* , Nonlinear Anal. T.M.A., **14**, (1990), 807–836.
- [2] Ioku, N., *The Cauchy problem for heat equations with exponential nonlinearity*, preprint.
- [3] Nakamura, M., Ozawa, T., *Nonlinear Schrödinger Equations in the Sobolev Space of Critical Order*, J. Funct. Anal. **155**, (1998), 364–380.
- [4] Ruf, B., Terraneo, E., *The Cauchy problem for a semilinear heat equation with singular initial data*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **50** (2002), 295–309.
- [5] Weissler, F., B., *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel Math. J., **38** (1981), 29–40.