# Wave front set defined by wave packet transform and its application

伊藤真吾　(東京理科大学・理)*

## 1　導入

本講演では，Córdoba-Fefferman [1] によって導入された wave packet 変換を用いた波面集合を定義し，それが Pilipović-Teofanov-Toft [4] で導入された波面集合と同値になることを紹介する．また，その同値性を利用して，双曲型偏微分方程式の解の特異性伝播を考える．

$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とし，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ は $\phi(0) \neq 0$ を満たすとする．このとき，

$$W_\phi u(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi(y-x)} u(y) e^{-iy\cdot\xi} dy \tag{1}$$

を $\phi$ を wave packet とする wave packet 変換という (詳しくは，Folland [3] を参照)．これを用いて，以下のような波面集合を導入する．

**定義 1.1.** $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$ とする．$(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ が $WF_s^{p,q}(u)$ に属さないとは，ある $x_0$ の近傍 $K$，$\xi_0$ の錐近傍 $\Gamma$，$\phi(0) \neq 0$ を満たす $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在して，

$$\left\| \|\chi_K(x)\chi_\Gamma(\xi)\langle\xi\rangle^s W_\phi u(x,\xi)\|_{L^p_x} \right\|_{L^q_\xi} < \infty \tag{2}$$

を満たすことである．ただし，$\chi_K$, $\chi_\Gamma$ はそれぞれ $K$, $\Gamma$ の特性関数，$\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ である．

一方，短時間フーリエ変換は以下のように定義される．$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を一つ固定する．このとき，$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$V_\phi f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi(y-x)} f(y) e^{-iy\cdot\xi} dy. \tag{3}$$

を $\phi$ を窓とする短時間フーリエ変換という (詳しくは，Feichtinger[2] を参照)．Pilipović-Teofanov-Toft [4] で導入された波面集合 $WF_{M_s^{p,q}}$ は，この短時間フーリエ変換を用いて定義される．

**定義 1.2.** *(Pilipović-Teofanov-Toft [4])* $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$, $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は $\phi(0) \neq 0$ を満たすとする．$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して，$(x_0,\xi_0) \notin WF_{M_s^{p,q}}(u)$ とは，$\alpha(x_0) = 1$ を満たすある $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と，ある $\xi_0$ の錐近傍 $\Gamma$ が存在して，

$$\left\| \|\chi_\Gamma(\xi)\langle\xi\rangle^s V_\phi(\alpha u)(x,\xi)\|_{L^p_x} \right\|_{L^q_\xi} < \infty \tag{4}$$

を満たすことである．

*本講演の内容は加藤圭一氏 (東京理科大)，小林政晴氏 (東京理科大) との共同研究に基づく．

## 2 主結果

**定理 2.1.** *$s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とするとき，次は同値.*

*(1)* $(x_0, \xi_0) \notin WF_s^{p,q}(u)$.

*(2)* $(x_0, \xi_0) \notin WF_{M_s^{p,q}}(u)$.

**注意 2.2.** Pilipović-Teofanov-Toft [4] において，*(2)* と
『$\psi(x_0) \neq 0$ を満たすある $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と，$\xi_0$ の錐近傍 $\Gamma$ が存在し，$\left\| \chi_\Gamma(\xi) \langle \xi \rangle^s \widehat{\psi u}(\xi) \right\|_{L^q_\xi} < \infty$.』
の同値性が示されている.

**定理 2.3.** *$1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする.*

$$\begin{cases} (\partial_t \pm i|D|)u(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5}$$

*の解 $u \in C(\mathbb{R}; M_s^{p,q}(\mathbb{R}^n))$ について，$(x_0, \xi_0) \notin WF_r^{p,q}(u_0)$($r > s$) ならば，任意の $t$ に対して，$(x_0 \pm \frac{\xi_0}{|\xi_0|} t, \xi_0) \notin WF_r^{p,q}(u(t, \cdot))$ が成り立つ (複合同順). ただし，$|D| = \mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}$.*

## 参考文献


[1] A. Córdoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Comm. Partial Differential Equations **3** (1978), no. 11, 979–1005.

[2] H. G. Feichtinger, *Modulation spaces on locally compact abelian groups*, in: M. Krishna et al. (eds.), Wavelets and their Applications (Chennai), Allied Publ., New Delhi, 2003, 99–140 (updated version of a technical report, Univ. of Vienna, 1983).

[3] G. B. Folland, Harmonic analysis in phase space, Ann. of Math. Studies No. **122**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.

[4] S. Pilipović, N. Teofanov and J. Toft, *Wave-front sets in Fourier Lebesgue spaces*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **66** (2008), no. 4, 259–270.