# 負の指数を持つ Hartree 方程式の解析

眞崎 聡 (学習院大・理)

email: masaki@math.gakushuin.ac.jp

次の Hartree 方程式を考える。

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = -\lambda(|x|^{-\gamma} * |u|^2)u, \qquad u(0,x) = u_0(x). \tag{H}$$

ただし $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ とし、$\lambda \in \mathbb{R}$ とする. $\gamma$ は非線型項の形状を表す指数である. 今回は

$$\gamma \in [-2,-1)$$

の場合を考察し,

$$u_0 \in H^{1,-\gamma/2} := \{f \in H^1(\mathbb{R}^n);\ \langle x\rangle^{-\gamma/2} f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

に属する初期値に対して (H) が大域解を持つことを示すのが目標である. これまでの Hartree 方程式の研究は主に $\gamma \in (0,n)$ の場合を対象としており ([1] によくまとまっている), そのときこの非線型部 $(|x|^{-\gamma} * |u|^2)$ は $|u|^2$ の分数階の積分に相当する Riesz ポテンシャルである. 一方, $\gamma < 0$ の場合にはその性質・振る舞いは大きく異なるものになる. 特に, $(|x|^{-\gamma} * |u|^2)$ は遠方で発散する関数である.

$\gamma < 0$ を考える動機について述べる. まず, これまで研究されてきた $\gamma > 0$ の場合は, 本質的には空間 3 次元のクーロン力を表す場合 $n = 3$, $\gamma = 1$ の一般化と言ってよい. この場合, $(|x|^{-1} * |u|^2)$ は Poisson 方程式 $-\Delta(|x|^{-1} * |u|^2) = c|u|^2$ に従うポテンシャルである. 空間 1 次元の場合には, 同じ Poisson 方程式 $-\partial_x^2(|x|^{-\gamma} * |u|^2) = c|u|^2$ を満たすのは $\gamma = -1$ のときであり, ここで遠方で発散するポテンシャルが現れる. この場合を次元とポテンシャルの増大速度に関して拡張し $n \geqslant 1$, $\gamma < 0$ の場合を考える. 一般化を行うのは, どの要素が方程式に本質的に影響を与えるかがより明確になると期待されるからである. $\gamma \in [-1,0)$ の場合は [2] で上の初期値に対して大域適切性が示されている[1]ため, 今回は $\gamma \in [-2,-1)$ を考察する.

今回の主定理を紹介する. 以後, 簡単のため $\nu = -\gamma \in (1,2]$ を導入する.

**定理 1** ($\nu < 2$ のとき)**.** $\nu \in (1,2)$ とする. 初期値 $u_0 \in H^{1,\nu/2}$ に対して (H) の大域解 $u_0 \in C(\mathbb{R}; H^{1,\nu/2}) \cap C^1(\mathbb{R}; (H^{1,\nu/2})')$ が存在. その解は初期値に連続に依存し, 質量 $\|u\|_{L^2}$, エネルギー

$$E[u] = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{4}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |x-y|^{\nu}|u(x)|^2|u(y)|^2 dxdy,$$

[1] $n = 1$, $\gamma = -1$ が扱われているが非線型項の増大がより遅い $n \geqslant 1$, $\gamma \in (-1,0)$ への拡張は容易.

モーメント

$$\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}\cdot\nabla u dx$$

を保存する．さらに解は次のクラスで一意:

$$\left\{u\in C(\mathbb{R};H^{1,\nu/2});\ \operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}\cdot\nabla u dx=\text{const.}\right\}.$$

**注意**: 一意性に条件が必要なため, 大域適切性よりは弱い結果である．

続いて $\nu=2$ の場合を紹介する．このとき解は陽に書ける．記号を準備する．まず, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ に対して作用素 $\pi_{\mathbf{a}}$, $\delta_{\mathbf{a}}$ をそれぞれ $(\delta_{\mathbf{a}}f)(x)=f(x+\mathbf{a})$, $(\pi_{\mathbf{a}}f)(x)=e^{-ix\cdot\mathbf{a}}f(x)$ とし $\mathcal{U}_{\omega,\pm}=\exp(it(\frac{\Delta}{2}\pm\frac{\omega^2}{2}|x|^2))$ とする．また, $0\neq u_0\in H^{1,1}$ に対して

$$M=\|u_0\|_{L^2},\quad \mathbf{a}=M^{-2}\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u_0(y)}\nabla u_0(y)dy,\quad \mathbf{b}=M^{-2}\int_{\mathbb{R}^n}y|u_0(y)|^2dy,$$

$$c:=\|\nabla u_0\|_{L^2}^2,\quad d:=\operatorname{Im}\int\overline{u_0}x\cdot\nabla u_0dx,\quad e:=\|xu_0\|_{L^2}^2,$$

と定ベクトル・定数を決め, 関数 $\Psi_\pm$ を

$$\begin{aligned}\Psi_+(t):=&\frac{M^2|\mathbf{a}|^2-2M^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-|\mathbf{b}|^2M^4+c+eM^2}{4M^3}\sinh(Mt)\cosh(Mt)\\&+\frac{d-M^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{2M^2}\sinh^2(Mt)-\frac{5M^2|\mathbf{a}|^2-2M^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2M^4+c-eM^2}{4M^2}t,\\ \Psi_-(t)=&-\frac{M^2|\mathbf{a}|^2+2M^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2M^4+c-eM^2}{4M^3}\sin(Mt)\cos(Mt)\\&+\frac{M^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-d}{2M^2}\sin^2(Mt)+\frac{7M^2|\mathbf{a}|^2+2M^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-|\mathbf{b}|^2M^4+c+eM^2}{4M^2}t\end{aligned}$$

と定める．このとき次が成立.

**定理 2** ($\nu=2$ のとき)**.** $n\geqslant 1$, $\nu=2$, $\lambda=\pm 1/2$ とする．$u_0\in H^{1,1}$ に対して, (H) の解は次で与えられる*:*

*(i)* $\lambda=1/2$ *のとき*, $u(t,x)=e^{i\Psi_+(t,x)}(\delta_{-\mathbf{b}}\pi_{-\mathbf{a}}\delta_{-\mathbf{a}t}\mathcal{U}_{M,+}(t)\pi_{\mathbf{a}}\delta_{\mathbf{b}}u_0)(x)$*;*

*(ii)* $\lambda=-1/2$ *のとき*, $u(t,x)=e^{i\Psi_-(t,x)}(\delta_{-\mathbf{b}}\pi_{-\mathbf{a}}\delta_{-\mathbf{a}t}\mathcal{U}_{M,-}(t)\pi_{\mathbf{a}}\delta_{\mathbf{b}}u_0)(x)$.

また, これらの解は次のクラスで一意*:*

$$\left\{u\in C(\mathbb{R};H^{1,1});\ \operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}\cdot\nabla u dx=\text{const.}\right\}.$$

**注意**: 一般の $\lambda>0$ の場合は適当なスケール変換で $\lambda=1/2$ に帰着. $\lambda<0$ も同様.

## 参考文献


[1] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.

[2] S. Masaki, *Energy solution to Schrödinger-Poisson system in the two-dimensional whole space*, archived as `arXiv:1001.4308`, 2010.