

# 斉次 Besov 空間における放物-楕円型 Keller-Segel 方程式の解の適切性と非適切性について

岩瀬 司 (東北大学大学院理学研究科数学専攻 D3)

本講演では次の Keller-Segel 方程式の初期値問題を, 斉次 Besov 空間  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  を用いて考察する.

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0 & \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = u & \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ただし,  $n \geq 1$  は空間次元を表す自然数である.

定義 (斉次 Besov 空間).  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  は次を満たすとする.

$$\text{supp } \hat{\phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2^{-j}\xi) \equiv 1 \text{ for any } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

ただし,  $\hat{\phi}$  は  $\phi$  の Fourier 変換を表すとする.  $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  を次で定義する.

$$\hat{\phi}_j(\xi) := \hat{\phi}(2^{-j}\xi).$$

$s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$  に対して斉次 Besov 空間  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  のノルム  $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$  を次で定義する.

$$\|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s} := \begin{cases} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} \|\phi_j * u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^q \right\}^{\frac{1}{q}} & \text{if } 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\phi_j * u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} & \text{if } q = \infty. \end{cases}$$

まず始めに尺度不変性の議論から得られる臨界の空間について述べる. 方程式 (P) の解を  $u, \psi$  とし,  $\lambda > 0$  に対して  $u_\lambda, \psi_\lambda$  を次で定義する.

$$u_\lambda(t, x) := \lambda^2 u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \psi_\lambda(t, x) := \psi(\lambda^2 t, \lambda x).$$

このとき,  $u_\lambda, \psi_\lambda$  も (P) の解であり, Lebesgue 空間  $L^p(\mathbb{R}^n)$  においては  $p = n/2$  が臨界値である. 実際次が成立する.

$$\sup_{t>0} \|u_\lambda(t)\|_{L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} \|u(t)\|_{L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Keller-Segel 方程式は 1970 年に E. F. Keller, L. A. Segel によって提唱された方程式であり数多くの研究がされている. 上記の性質を持つ  $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$  における考察としては, L. Corrias, B. Perthame, H. Zaag [2], H. Kozono, Y. Sugiyama [4] による結果が知られており,  $n \geq 2$  とし初期値が  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$  に属し  $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$  において小さいならば時間大域解が得られることが示された. P. Biler, M. Cannone, I. A. Guerra, G. Karch [1] は,  $n \geq 2$  とし次で定義される  $\mathcal{PM}^{n-2}$  から小さい初期値をとる時間大域解の存在を示した.

$$\mathcal{PM}^{n-2} := \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \hat{f} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n), \text{ess.sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{n-2} |\hat{f}(\xi)| < \infty \}.$$

T. Ogawa, S. Shimizu [5] は初期値が  $\dot{B}_{1,2}^0(\mathbb{R}^2)$  に属し、小さいならば時間大域が存在することを示した。

本講演では、斉次 Besov 空間  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  を用いて考察する。特に尺度不変性の議論から得られる  $s = -2 + n/p$  の場合について次の結果を得た。

定理. (1)  $n \geq 1$ ,  $\max\{1, n/2\} < p < \infty$  とする。このとき、十分小さい  $u_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$  に対して (P) の時間大域解が次の空間に一意的に存在する。

$$\{ u \in L^\infty(0, \infty; \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \mid \|u\|_X \leq 2\varepsilon \},$$

$$\|u\|_X := \begin{cases} \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{n}{p}}} + \sup_{t>0} t^{1-\frac{n}{2q}} \|u(t)\|_{L^q} + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2r}} \| |\nabla|^{-1} u(t) \|_{L^r} & \text{if } n/2 < p < n, \\ \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{n}{p}}} + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2p}} \|u(t)\|_{\dot{B}_{\rho,1}^{-1}} & \text{if } n \leq p < \infty, \end{cases}$$

ただし、 $\varepsilon > 0$  は十分小さく、 $q, r, \rho$  は次を満たす実数である。

$$p < q, r < \infty, \quad n < r, \quad \frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r},$$

$$n < \rho < \infty, \quad 1 \leq \frac{\rho}{2} \leq p \leq \rho.$$

(2) (P) は  $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-2}(\mathbb{R}^n)$  において非適切である。

注意. (1) 埋め込み定理により、次が成立する。

$$L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n), \dot{B}_{\frac{n}{2},2}^0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{if } \max\left\{1, \frac{n}{2}\right\} \leq p < \infty.$$

また、[1] による  $\mathcal{PM}^{n-2}$  ( $n \geq 4$ ) との関係については次が成立する。

$$\mathcal{PM}^{n-2} \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{if } 2 \leq p < \infty.$$

従って、Lebesgue 空間  $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , Besov 空間  $\dot{B}_{1,2}^0(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{PM}^{n-2}$  における結果 [1, 2, 4, 5] より広い関数空間において考察した。

(2) Lebesgue 空間においては 1 次元における考察は  $n/2 < 1$  より難しいと考えられるが、斉次 Besov 空間における微分指数を負とすることによって空間 1 次元も扱うことが出来た。

(3)  $\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$  に属する関数の例を紹介する。 $n \geq 3$  ならば  $|x|^{-2}$  は  $\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$  に属する。また、 $n = 2$  ならば  $\delta$ -関数が  $\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$  に属する。

## REFERENCES

- [1] P. Biler, M. Cannone, I. A. Guerra, G. Karch, *Global regular and singular solutions for a model of gravitating particles*, Math. Ann., **330** (2004), 693–708.
- [2] L. Corrias, B. Perthame, H. Zaag, *Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis system in high space dimensions*, Milan J. Math., **72** (2004), 1–28.
- [3] E. F. Keller, L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol., **26** (1970), 399–415.
- [4] H. Kozono, Y. Sugiyama, *Local existence and finite time blow-up of solutions in the 2-D Keller-Segel system*, J. Evol. Equ., **8** (2008), 353–378.
- [5] T. Ogawa, S. Shimizu, *End-point maximal regularity and its application to two dimensional Keller-Segel system*, Math. Z., **264** (2010), no. 3, 601–628.