A nondegeneracy result for least energy solutions to a biharmonic problem with nearly critical exponent

佐藤 友彦 (学習院大学理学部)

本発表は, 高橋太氏 (大阪市立大学理学研究科) との共同研究成果に基づく.

Ω を $\mathbb{R}^N (N \geq 5)$ の滑らかな境界を持つ有界領域とし, 次の 4 階楕円型方程式の Navier 境界値問題を考える:

$$(P_{\varepsilon,K}) \begin{cases} \Delta^2 u = c_0 K(x) u^{p_\varepsilon} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ここで, $c_0 = (N-4)(N-2)N(N+2)$, $\varepsilon > 0$, $p = (N+4)/(N-4)$ は埋め込み $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ に関する臨界 Sobolev 指数, $p_\varepsilon = p - \varepsilon$, K は $\bar{\Omega}$ 上 C^2 級の正値関数である.

本発表では, 係数関数 K についての以下の仮定 (K) の下で, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対する $(P_{\varepsilon,K})$ の最小エネルギー解の漸近的非退化性を報告する ([2]).

(K): $K \in C^2(\bar{\Omega})$ は $0 < K(x) \leq 1, K^{-1}(\max_{\bar{\Omega}} K) = \{x_0\} \subset \Omega, K(x_0) = 1$ をみたし, さらに, x_0 は K の非退化臨界点.

$(P_{\varepsilon,K})$ の最小エネルギー解 u_ε は $\varepsilon \to 0$ の際に係数関数 K の最大点で爆発することが知られている. つまり, $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty$, かつ x_ε を u_ε の最大点とすると, 部分列をとることで $x_\varepsilon \to x_0$ となる. 本講演の目的は, このような爆発解の定性的性質に係数関数 K がどのように影響するかを調べることである.

Theorem 1 (漸近的非退化性) $N \geq 5$ とし, 係数関数 K には (K) を仮定する. この時, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して $(P_{\varepsilon,K})$ の最小エネルギー解 u_ε は非退化である. すなわち線形化問題

$$\begin{cases} \Delta^2 v = c_0 p_\varepsilon K(x) u_\varepsilon^{p_\varepsilon - 1} v & \text{in } \Omega, \\ v = \Delta v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は自明解しか持たない.

主定理の証明は, 主部が $-\Delta$ の場合を扱った [4] の方法に従う. [4] では Hebey [1] による最小エネルギー解の L^∞ ノルムの漸近解析の結果を用いた. 一方, 主部が重調和作用素の場合には, [3] において, Hebey の結果が $(P_{\varepsilon,K})$ の最小エネルギー解に対して拡張されており, 証明ではその結果を用いる.

Proposition 2 ([3]) (K) を仮定する. $x_\varepsilon \in \Omega$ を $(P_{\varepsilon,K})$ の最小エネルギー解 u_ε の最大点とする. このとき部分列をとることで次の評価式が成り立つ.

$\varepsilon > 0$ に依らない正数 C が存在して, $r_\varepsilon = R_\varepsilon \|u_\varepsilon\|_\infty^{-\frac{p_\varepsilon - 1}{4}} \to 0$ をみたす任意の $R_\varepsilon \to \infty$ に対して

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) \le C \dfrac{\|u_\varepsilon\|_\infty}{\left(1 + \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{4}{N-4}} |x - x_\varepsilon|^2\right)^{\frac{N-4}{2}}}, & \mathit{for}\ |x - x_\varepsilon| \le r_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) \le \dfrac{C}{\|u_\varepsilon\|_\infty} \dfrac{1}{|x - x_\varepsilon|^{N-4}}, & \mathit{for}\ \{|x - x_\varepsilon| > r_\varepsilon\} \cap \Omega. \end{cases}$$

さらに $\varepsilon \to 0$ とすると

$$(1) \begin{cases} |x_\varepsilon - x_0| = O(\|u_\varepsilon\|_\infty^{-2}) & N = 5, \\ |x_\varepsilon - x_0| = o(\|u_\varepsilon\|_\infty^{-\frac{2}{N-4}}) & N \ge 6, \end{cases}$$

$$(2) \quad \|u_\varepsilon\|_\infty^\varepsilon \to 1,$$

$$(3) \quad \|u_\varepsilon\|_\infty u_\varepsilon(x) \to 2(N-4)(N-2)\sigma_N G(x, x_0) \quad \mathit{in}\ C^3_{loc}(\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}),$$

$$(4) \begin{cases} \varepsilon \|u_\varepsilon\|_\infty^2 \to \dfrac{2^{15}}{21} \pi R(x_0) & N = 5, \\ \varepsilon \|u_\varepsilon\|_\infty^2 \to -\dfrac{1}{4} \Delta K(x_0) + 480\pi^3 R(x_0) & N = 6, \\ \varepsilon \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{4}{N-4}} \to -\dfrac{2}{(N-2)(N-4)} \Delta K(x_0) & N \ge 7. \end{cases}$$

ここで σ_N は $(N-1)$ 次元単位球体積, $R(z)$ は Navier 境界条件を満たす Δ_x^2 の Green 関数 $G = G(x, z)$ の Robin 関数で, G の正則部分によって定められる:

$$R(z) = \left[\frac{1}{(N-4)(N-2)\sigma_N} |x - z|^{4-N} - G(x, z) \right]_{x=z}, \quad N \ge 5.$$

参考文献

[1] E. Hebey: *Asymptotic behavior of positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Sobolev growth,* Diff. Int. Eq. **13** (2000) 1073–1080.

[2] T. Sato, and F. Takahashi: *A nondegeneracy result for least energy solutions to a biharmonic problem with nearly critical exponent,* RIMS Kôkyûroku Bessatsu B15: Mathematical analysis on the self-organization and self-similarity (2009) 73–86.

[3] F. Takahashi: *Asymptotic behavior of least energy solutions for a biharmonic problem with nearly critical growth,* Asymptotic Anal. **60** (2008) 213–226.

[4] F. Takahashi: *Nondegeneracy of least energy solutions for an elliptic problem with nearly critical nonlinearity,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **140** (2010), no.1, 203–222.