

フィンスラー多様体への調和写像の部分正則性について

立川 篤 (東京理科大学理工学部数学科)*

N を n -次元可微分多様体とし、 TN を N の接束とする。さらに、 $TN \setminus 0 = \{(u, X) \in TN; X \neq 0\}$ とおく。次の条件をみたす関数 $F: TN \rightarrow [0, \infty)$ が与えられたとき、これを N のフィンスラー構造と呼ぶ。

- (i) 正則性: $F \in C^\infty(TN \setminus 0)$.
- (ii) 正同次性: $F(u, \lambda X) = \lambda F(u, X)$ for all $\lambda \geq 0$.
- (iii) 凸性: F^2 の X に関する Hessian が任意の $(u, X) \in TN \setminus 0$ において正定値である。

多様体 N とフィンスラー構造 F の組 (N, F) をフィンスラー多様体と呼ぶ。

P. Centore [1] によって導入された定義に従って、リーマン多様体 (M, g) からフィンスラー多様体 (N, F) への写像 u のエネルギー密度を以下のように定義する。まず、 $I_x M$ を g の $x \in M$ における indicatrix, すなわち

$$I_x M := \{\xi \in T_x M; \|\xi\|_g \leq 1\}$$

とおく。 C^1 -級写像 $u: M \rightarrow N$ に対して、 u の $x \in M$ におけるエネルギー密度 $e_C(u)(x)$ とエネルギー汎関数 $E_C(u)$ を

$$e_C(u)(x) := \frac{1}{\int_{I_x M} d\xi} \int_{I_x M} (u^* F)^2(\xi) d\xi, \quad E_C(u) := \int_M e_C(u)(x) d\mu$$

と定義する。ただし、 $u^* F$ は F の u による引き戻し、 μ は g から導かれる M 上の測度とする。

リーマン多様体間の写像の場合と同様に E_C の Euler-Lagrange 方程式の (弱) 解を (弱) 調和写像と呼ぶ。

弱調和写像の正則性を得るために、次の2つの仮定を加える。ある正定数 $\lambda < \Lambda$ に対して

$$\lambda |\xi|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(u, X)}{\partial X^i \partial X^j} \xi^i \xi^j \leq \Lambda |\xi|^2 \quad \forall u \in N, \forall (X, \xi) \in (\mathbb{R}^n \setminus 0) \times \mathbb{R}^n \quad (1)$$

が成り立つとする。さらに $F(u, X)$ の u に関する連続性について、

$$|F^2(u, X) - F^2(v, X)| \leq \omega(|u - v|^2) |X|^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

がある凹関数 $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ で $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$ を満たすものに対して成り立つと仮定する。

[3] において E_C の minimizer に対して、部分正則性に関する次の結果が得られた。

定理 1. (M, g) を m -次元リーマン多様体、 $\Omega \subset M$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし、 $(\mathbb{R}^n, F)$ をフィンスラー多様体とする。さらに、フィンスラー構造 F (1) と (2) を満たすとする。さらに、 $2 \leq m \leq 4$ とし、境界条件 f はある $s > m$ に対して $f \in H^{1,s}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ を満たすとする。 $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ を

$$H_f^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) := \{v \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n); v - f \in H_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)\}.$$

の中での energy の minimizer とする。このとき、開集合 $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}$ で $C^{0,\alpha}(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ をある $\alpha \in (0, 1)$ に対して満たすものがある。さらに、 $\mathcal{H}^{m-2-\delta}(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0) = 0$ がある $\delta > 0$ に対して成り立つ。

*e-mail: tachikawa_atsushi@ma.noda.tus.ac.jp

次に、「適当な条件下で，除外集合なしの正則性は得られるか？」という問題が考えられる．これに対して， $F(u, X)$ に特殊な構造を仮定して，定義域の内部におけるヘルダー連続性が得られることが示された．今回の講演で主に述べるのはこの結果についてである．

(N, h) をリーマン多様体とし，ある点 $p_0 \in N$ を固定し r_0 を p_0 の単射半径とする． $B(p_0, r_0) = \{x \in N ; \text{dist}(p_0, x) < r_0\}$ 上で正規座標系 $u = (u^1, \dots, u^n)$ をとり，この座標系に関する計量 h の係数を $h_{ij}(u)$ と表す．この $h_{ij}(u)$ から次のフィンスラー計量を考える．

$$F(u, X) = \sqrt{h_{ij}(u)X^iX^j + B(u, X)}, \quad (3)$$

ただし， $B : TN \rightarrow \mathbb{R}$ は $C^\infty(TN \setminus 0)$ に属す関数で， X に関して 2 次の正同次性を持つとする． B の X に関するヘッセ行列を $(b_{ij}(u, X))$ とおき，条件

$$b_{ij}(u, X) = \frac{\partial^2 B(u, X)}{\partial X^i \partial X^j}$$

を満たすとする．以上の条件のもとで，次の結果が得られる [2] ．

定理 2. (M, g) と $\Omega \subset M$ を定理 1 と同様とする． $F(u, X)$ を (3) で与えられるフィンスラー構造とし，フィンスラー多様体 $(\mathbb{R}^n, F)$ を考える．さらに， F は (1), (2) と次の条件を $B_0 = B(p_0, R_0) \subset N$ ($R_0 < r_0$) 上で満たすとする：

(i) ある $c_b < 1$ に対して b_{ij} は次を満たす．

$$|b_{ij}(u, X)u^iX^j| \leq c_b |h_{ij}(u)u^iX^j| \quad \text{for all } (u, X) \in TB_0.$$

(ii) 次の条件が任意の $(u, X) \in TB_0$ に対して成り立つような $\sigma > 0$ が存在する．

$$\{h_{ij}(u) + b_{ij}(u, X)\}X^iX^j + \frac{1}{2}u^k\{h_{ij,k}(u) + b_{ij,k}(u, X)\}X^iX^j \geq \sigma|X|^2,$$

ただし， $h_{ij,k} = \partial h_{ij} / \partial u^k$ ， $b_{ij,k} = \partial b_{ij} / \partial u^k$ とする．

ϕ を $\phi(\partial\Omega) \subset B_0$ を満たす滑らかな境界条件とする．このとき $H_\phi^{1,2}(\Omega, B_0) := \{v \in H^{1,2}(\Omega, B_0) ; v - \phi \in H_0^{1,2}(\Omega, B_0)\}$ の中で *energy* の最小値を与える弱調和写像 u が存在し， u は Ω でヘルダー連続となる．

参考文献

- [1] P. Centore. Finsler laplacians and minimal-energy maps. *Internat. J. Math.*, 11:1–13, 2000.
- [2] A. Tachikawa. Existence and regularity of a weakly harmonic map into a Finsler space with a special structure. *preprint*.
- [3] A. Tachikawa. Partial regularity results up to the boundary for harmonic maps into a Finsler manifold. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(5):1953–1970, 2009.