

分数冪ラプラシアン生成する解析半群の積分核の評価と漸近展開

第 97 回 神楽坂解析セミナー (2011.06.25)

進藤久和 (東京理科大学・理学部)

1 主結果

Δ を, $H^2(\mathbb{R}^N)$ を定義域とする, $L^2(\mathbb{R}^N)$ における通常のラプラシアンとし, $0 < \alpha < 1$ とする. よく知られているように, Δ の分数冪作用素 $-(-\Delta)^\alpha$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の角度 $\pi/2$ の解析半群を生成し, その積分核は

$$K_\alpha(z, x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} e^{-z|\xi|^{2\alpha}} d\xi \quad (\operatorname{Re} z > 0, x \in \mathbb{R}^N) \quad (1)$$

によって, $K_\alpha(z, x-y)$ と表される. この積分核 K_α の, z の偏角を制限しない評価として, 以下の定理 1, 4 を得た. z の偏角を制限しないというのは, $|\arg z| < \pi/2$ 以外の制限を加えないということである. 最初的评价是, $|z|^{-1/2\alpha}|x| \geq 1$ の場合の評価である. ただし, $\alpha = 1/2$ のときは特殊である.

定理 1. $N \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ とし, K_α は (1) で定められた積分核とする. また, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し,

$$c_{N,\alpha,k} := \frac{(-1)^k \alpha \cdot 2^{2\alpha+2\alpha k} \sin(\pi\alpha(k+1)) \Gamma(\alpha(k+1)) \Gamma((N+2\alpha+2\alpha k)/2)}{\pi^{(N+2)/2} k!}$$

とし, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\operatorname{Re} z > 0$ それぞれに対し,

$$E_n(r) := r^{-N-2\alpha-2\alpha n} \quad (r \geq 1),$$

$$\tilde{E}_z(r) := r^{(1-\alpha)N/(2\alpha-1)} \exp\left(-\rho \cdot \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \cdot r^{2\alpha/(2\alpha-1)}\right) \quad (r > 0),$$

とする. ただし, $\rho := 2^{-1}e^{-2} > 0$ とする. このとき, 以下のことが成り立つ.

- (i) $1/2 < \alpha < 1$ のとき, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, ある $C_n > 0$ があって, 各 $\operatorname{Re} z > 0$, $|z|^{-1/2\alpha}|x| \geq 1$ に対し,

$$\left| K_\alpha(z, x) - \sum_{k=0}^n \frac{c_{N,\alpha,k} z^{1+k}}{|x|^{N+2\alpha+2\alpha k}} \right| \leq C_n |z|^{-N/2\alpha} (E_{n+1}(|z|^{-1/2\alpha}|x|) + \tilde{E}_z(|z|^{-1/2\alpha}|x|))$$

が成り立つ.

- (ii) $\alpha = 1/2$ のとき, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $\delta > 0$ に対し, ある $C_{n,\delta} > 0$ があって, 各 $\operatorname{Re} z > 0$, $|z|^{-1}|x| \geq \delta$, $|z - i|x| \geq \delta|z|$, $|z + i|x| \geq \delta|z|$ に対し,

$$\left| K_{1/2}(z, x) - \sum_{k=0}^n \frac{c_{N,1/2,k} z^{1+k}}{|x|^{N+1+k}} \right| \leq C_{n,\delta} |z|^{-N} E_{n+1}(|z|^{-1}|x|)$$

が成り立つ.

(iii) $0 < \alpha < 1/2$ のとき, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, ある $C_n > 0$ があって, 各 $\operatorname{Re} z > 0, |z|^{-1/2\alpha}|x| \geq 1$ に対し,

$$\left| K_\alpha(z, x) - \sum_{k=0}^n \frac{c_{N,\alpha,k} z^{1+k}}{|x|^{N+2\alpha+2\alpha k}} \right| \leq C_n |z|^{-N/2\alpha} E_{n+1}(|z|^{-1/2\alpha}|x|)$$

が成り立つ.

注意 2. 講演では, それぞれの評価式の左辺の絶対値の中身を $L_{\alpha,n}(z, x)$ とおく.

定理 1 の評価式において, z の偏角を制限することにより, 次の漸近展開を得る.

系 3. N, α, K_α は定理 1 と同じとし, さらに任意に $\theta \in [0, \pi/2)$ を取ると, $|z|^{-1/2\alpha}|x| \rightarrow \infty$ のとき, $|\arg z| \leq \theta$ なる z に関し一様に

$$K_\alpha(z, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{N,\alpha,n} z^{1+n}}{|x|^{N+2\alpha+2\alpha n}}$$

が成り立つ. 正確には, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し,

$$\left| K_\alpha(z, x) - \sum_{k=0}^n \frac{c_{N,\alpha,k} z^{1+k}}{|x|^{N+2\alpha+2\alpha k}} \right|$$

を $|z|^{1+n}|x|^{-N-2\alpha-2\alpha n}$ で割った商は, $|z|^{-1/2\alpha}|x| \rightarrow \infty$ のとき, $|\arg z| \leq \theta$ なる z に関し一様に 0 に収束する.

この漸近展開は, $\theta = 0$ のとき, すなわち z が実数の場合, [4, Proposition 2.1] の漸近展開と一致する. 次の評価は, $0 < |z|^{-1/2\alpha}|x| \leq 1$ の場合の評価である. ただし, $\alpha = 1/2$ のときは特殊である.

定理 4. N, α, K_α は定理 1 と同じとする. また, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し,

$$\tilde{c}_{N,\alpha,k} := \frac{1}{2^N \pi^{(N+1)/2\alpha}} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma((2k+1)/2) \Gamma((2k+N)/2\alpha)}{\Gamma((2k+N)/2)}$$

とし, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し,

$$E_n(r) := r^{2n} \quad (0 < r \leq 1)$$

と定め, $\operatorname{Re} z > 0$ に対し, $\tilde{E}_z$ は定理 1 と同じものとする. このとき, 以下のことが成り立つ.

(i) $1/2 < \alpha < 1$ のとき,

$$K_\alpha(z, x) = z^{-N/2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{N,\alpha,n} \left(\frac{|x|}{z^{1/2\alpha}} \right)^{2n}$$

が成り立つ. ただし, 右辺の級数は, 任意の $R > 0$ に対し, $|z|^{-1/2\alpha}|x| \leq R$ なる $\operatorname{Re} z > 0, x \in \mathbb{R}^N$ に関し, 一様に絶対収束する.

(ii) $\alpha = 1/2$ のとき ,

$$K_{1/2}(z, x) = z^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{N,1/2,n} \left(\frac{|x|}{z} \right)^{2n}$$

が成り立つ . ただし , 右辺の級数は , 任意の $R \in (0, 1)$ に対し , $|z|^{-1}|x| \leq R$ なる $\operatorname{Re} z > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ に関し , 一様に絶対収束する .

(iii) $0 < \alpha < 1/2$ のとき , 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し , ある $C_n > 0$ があって , 各 $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < |z|^{-1/2\alpha}|x| \leq 1$ に対し ,

$$\begin{aligned} & \left| K_{\alpha}(z, x) - z^{-N/2\alpha} \sum_{k=0}^n \tilde{c}_{N,\alpha,k} \left(\frac{|x|}{z^{1/2\alpha}} \right)^{2k} \right| \\ & \leq C_n |z|^{-N/2\alpha} (E_{n+1}(|z|^{-1/2\alpha}|x|) + \tilde{E}_z(|z|^{-1/2\alpha}|x|)) \end{aligned}$$

が成り立つ .

注意 5. 講演では , (iii) の評価式の左辺の絶対値の中身を $\tilde{L}_{\alpha,n}(z, x)$ とおく .

定理 1, 4 を用いることにより , $K_{\alpha}(z, \cdot)$ の $L^1(\mathbb{R}^N)$ ノルムを評価できる . ただし , $\alpha = 1/2$ は特殊なので , ここでは除く . $\alpha = 1/2$ のときの評価は , [6, Theorem 7.20] の証明に載っている .

命題 6. N, K_{α} は定理 1 と同じとし , $0 < \alpha < 1/2$ または $1/2 < \alpha < 1$ とすると , ある $C_{\alpha} > 0$ があって ,

$$\|K_{\alpha}(z, \cdot)\|_{L^1} \leq C_{\alpha} \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \right)^{-N/2} \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

が成り立つ .

K_{α} の L^1 ノルムの評価は , [2] に載っている , integrated semigroup に関する結果から , ある程度得られる . これについては後述する .

2 定理 1 の証明の概略

簡単のために , $N = 1$, $\alpha \neq 1/2$ とする . また , $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z > 0$, $x \geq 1$ としても一般性を失わないことは容易に分かる . 以下に K_{α} の変形・評価過程を記すが , 全体像を把握するための補助であるので , 個々の等号や不等号の証明については , 講演で補足説明をする . 以下の変形・評価過程において , 各 $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} z > 0$ に対し ,

$$\phi_{n,z}(\xi) := \xi^{2\alpha-1} e^{-z\xi^{2\alpha}} - \xi^{2\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (-z\xi^{2\alpha})^k \quad (\xi > 0)$$

とし , $n, m \in \mathbb{N}$ は

$$2\alpha n \leq m < 2\alpha n + 2\alpha \quad (2)$$

満たすとする . このとき , 各 $\operatorname{Re} z > 0$, $x \geq 1$ に対し ,

$$R_n^{\pm}(z, x) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\xi} e^{\pm i x \xi} \phi_{n,z}(\xi) d\xi, \quad R_{n,m}^{\pm}(z, x) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\xi} e^{\pm i x \xi} \phi_{n,z}^{(m)}(\xi) d\xi$$

が存在し，以下が成り立つ．(5) の右辺の $C_{n,m}$ は z, x に依らない定数である．

$$\begin{aligned} & \left| K_\alpha(z, x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_{1,\alpha,k} z^{1+k}}{x^{1+2\alpha+2\alpha k}} \right| \\ &= \left| -\frac{\alpha z}{\pi} \left(\frac{1}{-ix} R_n^+(z, x) + \frac{1}{ix} R_n^-(z, x) \right) \right| \end{aligned} \quad (3)$$

$$= \left| -\frac{\alpha z}{\pi} \left(\frac{1}{(-ix)^{m+1}} R_{n,m}^+(z, x) + \frac{1}{(ix)^{m+1}} R_{n,m}^-(z, x) \right) \right| \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \leq C_{n,m} x^{-1-m} \left(1 + \sum_{k=0}^{1+m} \left| \int_{e^{-1}}^{\infty} e^{ix\xi} \xi^{2\alpha k-1-m} e^{-z\xi^{2\alpha}} d\xi \right| \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^{1+m} \left| \int_{e^{-1}}^{\infty} e^{-ix\xi} \xi^{2\alpha k-1-m} e^{-z\xi^{2\alpha}} d\xi \right| \right). \end{aligned} \quad (5)$$

(3) を示す方法は，講演でやや詳しく述べる．実際の証明では，[5, Lemma 1] に載っている次の公式

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} e^{\pm ixt} t^\mu dt = \frac{e^{\pm i\pi(1+\mu)/2} \Gamma(1+\mu)}{x^{1+\mu}} \quad (x > 0, \mu > -1)$$

を用いる．なお， $N \geq 2$ の場合は，この公式の代わりに [1, Corollary 9.10.4] の公式を用いる．(4) は，部分積分を用いることにより示せる．(5) は， $\phi_{n,z}^{(m)}$ の形を調べ，評価しやすい所を先に評価した結果である．この不等式の右辺の積分に関して，次の評価が成り立つ．

命題 7. $0 < \alpha < 1, \mu \in \mathbb{R}$ とする．

(i) $1/2 < \alpha < 1$ のとき，ある $C_\mu > 0$ があって，各 $|z| = 1, \operatorname{Re} z > 0, x \geq 1$ に対し，

$$\begin{aligned} & \left| \int_{e^{-1}}^{\infty} e^{\pm i x \xi} \xi^\mu e^{-z \xi^{2\alpha}} d\xi \right| \\ & \leq C_\mu (1 + x^{(\mu+1-\alpha)/(2\alpha-1)} \exp(-\rho \cdot \operatorname{Re} z \cdot x^{2\alpha/(2\alpha-1)})) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし， ρ は定理 1 と同じく $\rho = 2^{-1}e^{-2}$ である．

(ii) $\alpha = 1/2$ のとき，任意の $\delta > 0$ に対し，ある $C_{\mu,\delta} > 0$ があって，各 $|z| = 1, \operatorname{Re} z > 0, x > 0, |z - ix| \geq \delta, |z + ix| \geq \delta$ に対し，

$$\left| \int_{e^{-1}}^{\infty} e^{\pm i x \xi} \xi^\mu e^{-z \xi} d\xi \right| \leq C_{\mu,\delta}$$

が成り立つ．

(iii) $0 < \alpha < 1/2$ のとき，ある $C_\mu > 0$ があって，各 $|z| = 1, \operatorname{Re} z > 0, x \geq 1$ に対し，

$$\left| \int_{e^{-1}}^{\infty} e^{\pm i x \xi} \xi^\mu e^{-z \xi^{2\alpha}} d\xi \right| \leq C_\mu$$

が成り立つ．

(i) は停留位相法を用いて証明する．(ii), (iii) は，停留位相法を用いずに証明できる．
(i) を証明する際， $b := |\operatorname{Im} z|$ とし， ξ を改めて $(x/b)^{1/(2\alpha-1)}\xi$ とする置換をして，積分を次のように変形する：

$$\int_{e^{-1}}^{\infty} e^{\pm i x \xi} \xi^{\mu} e^{-z \xi^{2\alpha}} d\xi = \left(\frac{x}{b}\right)^{(\mu+1)/(2\alpha-1)} \int_{\lambda'}^{\infty} e^{\pm i \lambda f(\xi)} u(\xi) d\xi. \quad (6)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \lambda' &:= e^{-1}(x/b)^{-1/(2\alpha-1)}, & \lambda &:= (x^{2\alpha}/b)^{1/(2\alpha-1)}, & f(\xi) &:= \xi \pm \xi^{2\alpha}, \\ u(\xi) &:= \xi^{\mu} \exp(-\kappa \xi^{2\alpha}), & \kappa &:= \operatorname{Re} z \cdot (x/b)^{2\alpha/(2\alpha-1)} \end{aligned}$$

である． f 以外は， z, x を含むので，注意して取り扱わなければならない．一方， f の定義式の $\pm$ は，(6) の左辺で $e^{ix\xi}$ と $e^{-ix\xi}$ のどちらを選ぶかと， $\operatorname{Im} z$ の符号によって， $+$ か $-$ かが決まる． $f(\xi) = \xi + \xi^{2\alpha}$ のときは，停留位相法を用いずに，部分積分によって (i) を示せる． $f(\xi) = \xi - \xi^{2\alpha}$ のときは，停留位相法を用いる．具体的には，次の [3, Lemma 7.7.3] を用いる．参考のため，一般次元での主張を述べておく．

補題 8 ([3, Lemma 7.7.3]). A を N 次実対称行列とし， $\det A \neq 0$ とする．このとき，ある $C > 0$ があって，任意の $\lambda > 0$ と $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\lambda(tAx)} \varphi(x) dx \right| \leq C \lambda^{-N/2} \sum_{|\beta| \leq [N/2]+1} \|\partial^{\beta} \varphi\|_{L^2}$$

が成り立つ．ただし， $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ は Schwartz 空間であり， $[\cdot]$ は Gauss 記号である．

注意 9. 定数 C が λ, φ に依らないことは重要である．

補題 8 を利用するために， f に Morse の補題を適用する．Morse の補題は，局所的に成立するので，(6) の右辺の積分そのものではなく， f の停留点に近い所での積分の評価ができる．具体的には， f の停留点を ξ_{α} とすると，ある $\delta > 0$ と $C > 0$ があって，各 $|z| = 1, \operatorname{Re} z > 0, x \geq 1$ に対し，

$$\left| \int_{\xi_{\alpha}-\delta}^{\xi_{\alpha}+\delta} e^{\pm i \lambda f(\xi)} u(\xi) d\xi \right| \leq C x^{-\alpha/(2\alpha-1)} \exp(-\rho \cdot \operatorname{Re} z \cdot x^{2\alpha/(2\alpha-1)}) \quad (7)$$

が成り立つ．なお，補題 8 を用いるには，Morse の補題を f に適用したあと， u を滑らかに cut off する必要があるが， $N = 1$ の場合，そうしなくてもよい証明方法があるので，特に断りはしなかった．

一方， f の停留点 ξ_{α} に近い所での積分は，部分積分によって次のように評価できる：
 $\delta > 0$ は (7) にあるものと同じとすると，ある $C > 0$ があって，各 $|z| = 1, \operatorname{Re} z > 0, x \geq 1$ に対し，

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(\lambda', \infty) \setminus [\xi_{\alpha}+\delta, \xi_{\alpha}+\delta]} e^{\pm i \lambda f(\xi)} u(\xi) d\xi \right| \\ & \leq C \left(x^{-(\mu+1)/(2\alpha-1)} + x^{-2\alpha/(2\alpha-1)} \exp(-\rho \cdot \operatorname{Re} z \cdot x^{2\alpha/(2\alpha-1)}) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

が成り立つ．これらの評価式 (7), (8) と (6) より，命題 7 (i) が得られる．そして，命題 7 の評価式を (5) に適用することにより，定理 1 が示されるが， n に課していた (2) という制限をはずす方法については，講演で述べることにする．

3 定理 4 の証明の方針

(i) と (ii) は,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} e^{-z|\xi|^{2\alpha}} d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i|x|\xi_N} e^{-z|\xi|^{2\alpha}} d\xi$$

という変形をしたあと, $e^{i|x|\xi_N}$ を級数展開して, 項別積分することにより示される. (iii) は, $e^{ix\xi}$ の級数展開に基くようにすれば, 定理 1 (i) と同様にして証明ができる.

4 命題 7 に関連する既存の結果

[2] の Theorem 8.3.9 と Theorem 3.9.13 より, 次のことが導かれる.

命題 10. N, K_α は定理 1 と同じとし, $0 < \alpha < 1/2$ または $1/2 < \alpha < 1$ とすると, 以下が成り立つ.

(i) $k > N/2$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, ある $M, \omega \geq 0$ があって,

$$\|K_\alpha(z, \cdot)\|_{L^1} \leq \frac{Me^{\omega|z|}}{(\operatorname{Re} z)^k} \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

が成り立つ.

(ii) $\gamma < [N/2]$ なる任意の $\gamma \geq 0$ に対し, 次のような $M, \omega \geq 0$ は存在しない:

$$\|K_\alpha(z, \cdot)\|_{L^1} \leq \frac{Me^{\omega|z|}}{(\operatorname{Re} z)^\gamma} \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

(ii) の「 $\gamma < [N/2]$ なる任意の $\gamma \geq 0$ 」という部分は, 「 $0 \leq \gamma < k \leq N/2$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在するような任意の γ 」と言い換えてもよい.

参考文献

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, “Special Functions”, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, “Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems”, Monographs in Mathematics 96, Birkhäuser, 2001.
- [3] L. Hörmander, “The Analysis of Linear Partial Differential Operators I”, Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [4] S. Miyajima, H. Shindoh, *Gaussian estimates of order α and L^p -spectral independence of generators of C_0 -semigroups*, Positivity **11** (2007), no. 1, 15–39.
- [5] F. W. J. Olver, *Error bounds for stationary phase approximations*, SIAM J. Math. Anal. **5** (1974), no. 1, 19–29.
- [6] E. M. Ouhabaz, “Analysis of heat equations on domains”, London Mathematical Society monographs 31, Princeton Univ. Press, 2005.