ベキ乗型非線形境界条件を持つ熱方程式の爆発解の特異性について

原田 潤一 (早稲田大学 先進理工学部, 助手)

以下の正値解の爆発現象について考察する.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \times (0,T), \\ \partial_\nu u = u^q & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, $\partial_\nu = -\partial/\partial_n$. 指数 $q > 1$ は $n \geq 3$ の場合には $q < n/(n-2)$ を仮定する. 方程式 (1) は初期値が十分大きい時には, その解は有限時刻で爆発することがわかる. ここで有限時刻 $T > 0$ で解が爆発するとは

$$\limsup_{t \to T} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)} = \infty$$

のことを言う. また次の極限 (各点収束の意味)

$$U(x) := \lim_{t \to T} u(x,t) \in [0, \infty]$$

が存在するとき, $U(x)$ を blow-up profile と呼ぶ. 本講演の目的は blow-up profile $U(x)$ の空間的な特異性を考察することである.

Definition 1. 関数 $f(x) \in C(\mathbb{R}^n_+)$ が x_n-軸対称であるとは, $f(x) = f(|x'|, x_n)$ と書けることを言う.

初期値 $u_0(x)$ には以下の仮定を設ける.

$$x' \cdot \nabla' u_0(x) \leq 0, \quad \partial_n u_0(x) \leq 0. \tag{A}$$

本講演の主結果は以下の二つである.

Theorem 1 (single point blow-up). 初期値 $u_0(x)$ は x_n-軸対称でかつ (A) を満たすとする. このとき解 $u(x,t)$ が有限時刻で爆発するならば, 原点のみで爆発する.

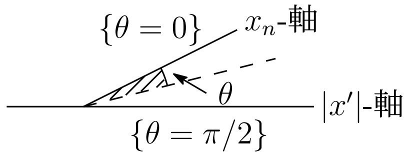
Theorem 2 (singularities of blow-up profile). 初期値 $u_0(x)$ は Theorem 1 の仮定を満たすとする．このとき解 $u(x,t)$ が有限時刻で爆発するならば，*blow-up profile* $U(x)$ が存在して次を満たす．

$$c_1\left(\frac{|\log|x'||}{|x'|^2}\right)^{1/2(q-1)} \le U(x',0) \le c_2\left(\frac{|\log|x'||}{|x'|^2}\right)^{1/2(q-1)}.$$

Remark of Theorem 1. 初期値が仮定 (A) を満たすならば $u(\cdot,t)$ も仮定 (A) を満たすので，仮定 (A) は single point blow-up のための自然な仮定である．また single point blow-up が起こることより blow-up profile $U(x)$ が存在して

$$U(x) \in C(\overline{\mathbb{R}^n_+}\setminus\{0\}), \quad \lim_{x\to 0} U(x) = \infty.$$

Remark of Theorem 2. Theorem 2 で得られている特異性は $U(x)$ を $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}; x_n = 0\}$ 上に限定した場合の特異性について述べていることになる． 極座標 $r = |x|, \quad \tan\theta = |x'|/x_n$ を用いると，Theorem 2 では $\theta = \pi/2$ の方向からの特異性を与えていることになる．



より一般の方向 $\theta \in [0,\pi/2)$ からの特異性は実は既存の結果 (Chlebic-Fila 2000) から容易に得られる．具体的には

$$U(x) = c_q(\cos\theta)^{-1/(q-1)}(1+o(1))r^{-1/(q-1)}.$$

ここで $\theta = \pi/2$ を代入すると $(\cos\theta)^{-1/(q-1)}$ の値が無限大になってしまうので，上の式は意味を持たないことになる．これより $\theta = \pi/2$ の方向の特異性を調べるためにはより詳細な解析が必要になる．

自己相似変数を用いた解析. 自己相似変数 $x = (T-t)^{1/2}y$, $T-t = e^{-s}$ を用いて

$$\varphi(y,s) = (T-t)^{1/2(q-1)}u(x,t)$$

を導入する．このとき $\varphi(y,s)$ は次の方程式を満たす．

$$\begin{cases} \partial_s\varphi = \Delta\varphi - \dfrac{y}{2}\cdot\nabla\varphi - \dfrac{1}{2(q-1)}\varphi & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \times (s_T,\infty), \\ \partial_\nu\varphi = \varphi^q & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \times (s_T,\infty). \end{cases} \tag{2}$$

Chlebic-Fila (2000) らは $\varphi(y,s)$ の $s\sim\infty$ での漸近形

$$\lim_{s\to\infty}\varphi(y,s) = \varphi_0(y_n) \quad \text{in } C_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$$

を得た．ここで $\varphi_0(y_n)$ は (2) の有界な正値一意定常解である．我々の目標は $\varphi(y,s)$ の $s\sim\infty$ でのより詳細な漸近系を得ることである．