シュレディンガー方程式の解の特異性について

加藤　圭一　(東京理科大学理学部)*1
小林　政晴　(東京理科大学理学部)*2
伊藤　真吾　(東京理科大学理学部)*3

1. 主結果

自由粒子のシュレーディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\triangle u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

及び調和振動子のシュレーディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\triangle u - |x|^2 u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

を考える．ここで，$i = \sqrt{-1}$，　$u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$，$\triangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とする．

本講演では，$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ のとき，上の初期値問題の解 $u(t,x)$ で $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ を満たすものについて，時刻 $t \neq 0$ における特異性を初期値 u_0 から決定することを考える．$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ とし，$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．f の波束変換 (Wave Packet transform)$W_\varphi f(x,\xi)$ を

$$W_\varphi f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy$$

と定義する (Córdoba-Fefferman[1]).

$\varphi_0(x) = e^{-|x|^2/2}$ とする．

$$\varphi^{(t)}(x) = \frac{1}{(1+ti)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1+ti)}|x|^2\right) = e^{i\frac{t}{2}\triangle}\varphi_0(x)$$

とおき，$\varphi_\lambda^{(t)}(x) = \varphi^{(\lambda t)}(\lambda^{1/2}x)$ と定義する．

定理 1. $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする．$(x_0,\xi_0) \notin WF(e^{-\frac{i}{2}t\triangle}u_0)$ であることの必要十分条件は，x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して，任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $a \geq 1$ に対し，ある $C_{N,a} > 0$ があって，$\lambda \geq 1$ と $a^{-1} \leq |\xi| \leq a$ となるすべての λ, $x \in K$ および $\xi \in \Gamma$ に対して以下の式を満たすことである：

$$|W_{\varphi_\lambda^{(-t)}} u_0(x - \lambda t\xi, \lambda\xi)| \leq C_{N,a}\lambda^{-N}.$$

*1 e-mail: `kato@ma.kagu.tus.ac.jp`
*2 e-mail: `kobayashi@ma.kagu.tus.ac.jp`
*3 e-mail: `ito@ma.kagu.tus.ac.jp`

$\psi_0(x) = \exp(-|x|^2/2)$，$x(t,\lambda) = x\cos t - \lambda\xi\sin t$，$\xi(t,\lambda) = \lambda\xi\cos t + x\sin t$ とし，$\psi_{0,\lambda}(x) = \lambda^{n/4}\psi_0(\lambda^{1/2}x)$ とおく．

定理 2. $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とし，$u(t,x)$ を (2) の解で $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属するものとする．このとき，$(x_0, \xi_0) \notin WF(u(t,x))$ であるための必要十分条件は，x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して，任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $a \geq 1$ に対し，ある $C_{N,a} > 0$ があって，$\lambda \geq 1$ と $a^{-1} \leq |\xi| \leq a$ となるすべての λ, $x \in K$ および $\xi \in \Gamma$ に対して以下の式を満たすことである：

$$|W_{\psi_{0,\lambda}} u_0(x(t,\lambda), \xi(t,\lambda))| \leq C_{N,a}\lambda^{-N}.$$

注意 3. Nakamura[5] や Hassell-Wunsch[3] では，主部が $\triangle$ でないような一般的なシュレーディンガー方程式に対して，初期値により，時刻 t での解の Wave front set $WF(u(t,x))$ を特徴づけている．本講演の結果は，その特徴づけを自由粒子および調和振動子の場合に限り，波束変換によって行ったものである．

注意 4. 波束変換を用いたシュレーディンガー方程式の解の特異性の研究は，Ōkaji[6] で行われている．

2. 証明の方針

定理 1 の証明には，Folland[2] による Wave front set の特徴づけと [4] で与えられている解の表示

$$W_{\varphi(t,\cdot)} u(t,x,\xi) = e^{-\frac{i}{2}t|\xi|^2} W_{\varphi_0} u_0(x - \xi t, \xi) \tag{3}$$

を用いる．ただし，$\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，$\varphi(t,x) = e^{\frac{i}{2}\triangle}\varphi_0(x)$ である．定理 2 の証明には，解の表示

$$W_{\psi(t,\cdot)}[u](t,x,\xi) = e^{\frac{i}{2}\int_0^t (|\xi(s-t)|^2 - |x(s-t)|^2)ds} W_{\widetilde{\psi_0}}(x(t), \xi(t)) \tag{4}$$

を用いる．ただし，$x(t) = x\cos t - \xi\sin t$，$\xi(t) = \xi\cos t + x\sin t$，$\widetilde{\psi}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であり，$\psi(t,x)$ は，$\widetilde{\psi}_0$ を初期値とする (2) の解である．

参考文献

[1] A. Córdoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Comm. Partial Differential Equations **3** (1978), no. 11, 979–1005.

[2] G. B. Folland, Harmonic analysis in phase space, Prinston Univ. Press, 1989.

[3] A. Hassell and J. Wunsch, *The Schrödinger propagator for scattering metrics* , Ann. of math. **182** (2005), 487–523.

[4] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, *Representation of Schrödinger operator of a free particle via short time Fourier transform and its applications*, Preprint.

[5] S. Nakamura, *Semiclassical singularities propagation property for Schrödinger equations*, J. Math. Soc. Japan, **61**(2009), no. 1, 177–211.

[6] T. Ōkaji, *Propagation of Wave Packets and its Applications.* Operator Theory: Advances and Appl. J. Math. **126** (2001), 239–243.