Sobolev 空間と modulation 空間の包含関係について

小林 政晴 (東京理科大学 理学部)

杉本 充氏 (名古屋大学) との共同研究

本講演では, L^p-Sobolev 空間と Feichtinger ([1]) により導入された modulation 空間の包含関係について報告したい. ここで, L^p-Sobolev 空間と modulation 空間はそれぞれ次のように定義される函数空間である.

定義 1 (L^p-Sobolev 空間). $1 \le p \le \infty, s \in \mathbf{R}$ とする. このとき, L^p-Sobolev 空間 $L^p_s(\mathbf{R}^n)$ をノルム

$$\|f\|_{L^p_s} := \left\| (\langle \cdot \rangle^s \widehat{f}(\cdot))^\vee \right\|_{L^p}, \qquad \langle \cdot \rangle = (1 + |\cdot|^2)^{1/2}$$

が有限となる緩増加超函数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ 全体と定義する.

定義 2 (Modulation 空間). 急減少函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ を

$$\operatorname{supp} \varphi \subset [-1,1]^n, \qquad \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \varphi(\xi - k) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n,$$

を満たすようにとる. $1 \le p, q \le \infty$, $s \in \mathbf{R}$ に対して modulation 空間 $M^{p,q}_s(\mathbf{R}^n)$ をノルム

$$\|f\|_{M^{p,q}_s} := \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \left(\langle k \rangle^s \|\varphi(D-k) f\|_{L^p} \right)^q \right)^{1/q}$$

が有限となる緩増加超函数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ 全体と定義する. ただし, $\varphi(D-k)f := (\varphi(\cdot - k)\widehat{f}(\cdot))^\vee, \langle k \rangle := (1+|k|^2)^{1/2}$ とする.

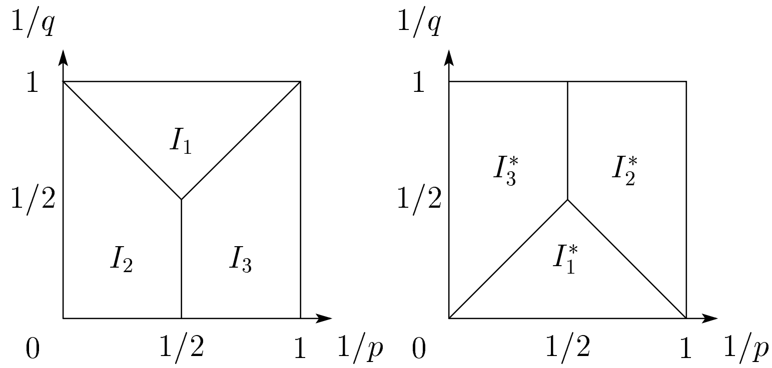
注意 3. $M^{p,q}_s(\mathbf{R}^n)$ は函数 φ の取り方に依らない. 特に $s = 0$ の場合, $M^{p,q}_0(\mathbf{R}^n)$ を $M^{p,q}(\mathbf{R}^n)$ で表す. $M^{2,2}_s(\mathbf{R}^n) = L^2_s(\mathbf{R}^n)$ となる.

Modulation 空間と他の函数空間との包含関係の研究は様々あり (例えば, Kobayashi-Miyachi-Tomita [2], Sugimoto-Tomita [3], Toft [4]), 特に次の包含関係が成り立つ: 指数 $\nu_1(p,q)$, $\nu_2(p,q)$ を

$$\nu_1(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{if } (1/p,1/q) \in I_1^* \ : \ \min(1/p,1/p') \ge 1/q, \\ 1/p + 1/q - 1 & \text{if } (1/p,1/q) \in I_2^* \ : \ \min(1/q,1/2) \ge 1/p', \\ -1/p + 1/q & \text{if } (1/p,1/q) \in I_3^* \ : \ \min(1/q,1/2) \ge 1/p, \end{cases}$$

$$\nu_2(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{if } (1/p,1/q) \in I_1 \ : \ \max(1/p,1/p') \le 1/q, \\ 1/p + 1/q - 1 & \text{if } (1/p,1/q) \in I_2 \ : \ \max(1/q,1/2) \le 1/p', \\ -1/p + 1/q & \text{if } (1/p,1/q) \in I_3 \ : \ \max(1/q,1/2) \le 1/p, \end{cases}$$

で定める.



このとき,

(1) $s > n\nu_1(p,q)$ ならば $L^p_s(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow M^{p,q}(\mathbf{R}^n)$ が成り立つ. 逆に, $L^p_s(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow M^{p,q}(\mathbf{R}^n)$ ならば $s \geq n\nu_1(p,q)$ である;

(2) $s < n\nu_2(p,q)$ ならば $M^{p,q}(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow L^p_s(\mathbf{R}^n)$ が成り立つ. 逆に, $M^{p,q}(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow L^p_s(\mathbf{R}^n)$, ならば $s \leq n\nu_2(p,q)$ である.

本講演では, $s = n\nu_1(p,q)$ または $s = n\nu_2(p,q)$ の場合, この包含関係がどのようになるのか考える. 得られた結果は次である:

定理 4. $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbf{R}$ とする. 埋め込み $L^p_s(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow M^{p,q}(\mathbf{R}^n)$ が成り立つための必要十分条件は, 次のいずれかが成り立つことである:

(1) $q \geq p > 1$ かつ $s \geq n\nu_1(p,q)$;
(2) $p > q$ かつ $s > n\nu_1(p,q)$;
(3) $p = 1, q = \infty$ かつ $s \geq n\nu_1(1,\infty)$;
(4) $p = 1, q \neq \infty$ かつ $s > n\nu_1(1,q)$.

定理 5. $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbf{R}$ とする. 埋め込み $M^{p,q}(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow L^p_s(\mathbf{R}^n)$ が成り立つための必要十分条件は, 次のいずれかが成り立つことである:

(1) $q \leq p < \infty$ かつ $s \leq n\nu_2(p,q)$;
(2) $p < q$ かつ $s < n\nu_2(p,q)$;
(3) $p = \infty, q = 1$ かつ $s \leq n\nu_2(\infty,1)$;
(4) $p = \infty, q \neq 1$ かつ $s < n\nu_2(\infty,q)$.

References

[1] H.G. Feichtinger, *Modulation spaces on locally compact abelian groups*, technical report, University of Vienna, 1983.
[2] M. Kobayashi, A. Miyachi and N. Tomita, *Embedding relations between local Hardy and modulation spaces,* Studia Math. 192 (2009), pp. 79–96.
[3] M. Sugimoto and N. Tomita, *The dilation property of modulation spaces and their inclusion relation with Besov spaces*, J. Funct. Anal. 248 (2007), pp. 79–106.
[4] J. Toft, *Continuity properties for modulation spaces, with applications to pseudo-differential calculus, I*, J. Funct. Anal. 207 (2004), pp. 399–429.