

レゾルベントと囲い込み法における指示関数の漸近挙動^{*†}

川下 美潮 (広島大学 大学院理学研究科)[‡]

1 はじめに

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域、 $D \subset \Omega$ は開集合で $\overline{D} \subset \Omega$, $\Omega \setminus \overline{D}$ は連結とします。さらに $\partial\Omega$, ∂D は C^{2,α_0} 級 ($0 < \alpha_0 \leq 1$) とします。

レゾルベントの漸近挙動 次の方程式を考えます。

$$(E) \begin{cases} (\Delta - \lambda^2)\phi(x; \lambda) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \phi(x; \lambda) = h(x) & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (R) \begin{cases} (\Delta - \lambda^2)w(x; \lambda) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \partial_\nu w(x; \lambda) = g(x) & \text{on } \partial\Omega, \\ \partial_\nu w(x; \lambda) = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

但し $\nu(x) = {}^t(\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ はそれぞれ $\partial\Omega$, ∂D に対する単位外向き法線ベクトルで、 $\partial_\nu = \partial_{\nu_x} = \sum_{j=1}^3 \nu_j(x) \partial_{x_j}$ です。この講演では (E) や (R) の解 $\phi(x; \lambda)$ や $w(x; \lambda)$ のことを「レゾルベント」と呼ぶことにします。

Varadhan [20] によれば (E) の解 $\phi(x; \lambda)$ は $\exists C > 0$ s.t. $h(y) \geq C$ ($y \in \partial\Omega$) のとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-1}{\lambda} \log \phi(x; \lambda) = d(x) (:= \text{dist}(x, \partial\Omega)) \quad (x \in \Omega \text{ 上で広義一様})$$

という漸近挙動が成り立ちます。この事実は熱方程式の基本解の短時間漸近挙動について調べるのに使われています。

熱方程式に対する境界値逆問題と囲い込み法 熱伝導体 $\Omega \setminus \overline{D}$ を伝わる熱伝導現象を考えます。時刻 t における位置 x での温度を $u(t, x)$ と表します。外部の境界 $\partial\Omega$ 上に与えた熱流 $f(t, x) = \partial_\nu u(t, x)$ ($(t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega$) に対し、境界 $\partial\Omega$ 上の温度分布 $u(t, x)|_{(0, T) \times \partial\Omega}$ を計測します。但し、 $T > 0$ は観測時間です。

熱流 f に対して内部における温度分布 u は次の方程式で記述されます。

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(t, x) = 0 & \text{in } (0, T) \times (\Omega \setminus \overline{D}), \\ \partial_\nu u(t, x) = 0 & \text{on } (0, T) \times \partial D, \\ u(0, x) = 0 & \text{on } \Omega \setminus \overline{D}. \end{cases} \quad (1.1)$$

観測のために与える熱流 $f(t, x)$ の集合を $X \subset L^2((0, T) \times \partial\Omega)$ とします。熱流 $f \in X$ を一つ選び境界に与え、境界上での温度分布 u を観測することにより、観測データの集合

$$\mathcal{E}_X = \{ (u|_{(0, T) \times \partial\Omega}, f) \mid u \text{ は (1.1) と } f = \partial_\nu u|_{(0, T) \times \partial\Omega} \in X \text{ を満たす。} \} \quad (1.2)$$

が得られます。例えば [5], p.473, p.512-513, p.520 にあるように $f \in L^2((0, T) \times \partial\Omega)$ に対し、(1.1) と $\partial_\nu u|_{(0, T) \times \partial\Omega} = f$ を満たす弱解 $u \in L^2((0, T); H^1(\Omega \setminus \overline{D})) \cap C([0, T]; L^2(\Omega \setminus \overline{D}))$ がただ一つ存在することに加え、定数 $C_T > 0$ が存在して次のように評価されることが分ります。

^{*}本講演の内容は池田優氏 (群馬大学 大学院工学研究科) との共同研究に基づくものです。

[†]この原稿は第 106 回神楽坂解析セミナーにおける講演要旨です。

[‡]kawasita@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

$$\|u\|_{L^2((0,T);H^1(\Omega\setminus\overline{D}))} + \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{D})} \leq C_T \|f\|_{L^2((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega))}.$$

以下この弱解を用いて議論を進めます。

この講演では次の熱方程式に対する境界値逆問題を考えます。

「観測データの集合 $\mathcal{E}_X$ から D がある場所や D の形状を求めることができるか。」

ここで無限回観測、一回観測について述べます。無限回観測とは無限回の観測を（理論として）許す、すなわち $\#X = \infty$ の場合を考えることをいいます。それに対して一回観測とは一度しか観測を行わない、すなわち $\exists f$ s.t. $X = \{f\}$ となるときのことを指します。このときは一組の観測データから D のどのような情報が得られるかが問題になります。

境界値逆問題は1980年にCalderónによって提唱された導体表面における電圧と電流分布から導体内部（電気伝導率や空洞などについて）の様子を知るという問題がその起源です。この問題は楕円型微分方程式に対する境界値逆問題として数学的に定式化され、微分方程式論の視点からも盛んに研究され、多くのことが明らかにされてきました。境界値逆問題の考察対象は主に「一意性」、「安定性」、「再構成」の3つに分けられます。

熱方程式に対する境界値逆問題についても概ね上の三つの問題に分けることができます。関連した研究を講演者の知る範囲で以下の表にまとめてみました¹。

一意性	Elayyan-Isakov [6]	∂D の一点を決めるのも無限回観測が必要
	Bryan-Caudill [1]	一回観測、 $u(0, x) = (\text{定数})$ の必要性を指摘
安定性	Canuto-Rosset-Vessella [2]	Carleman 型評価式と関係あり
	Vessella [18], [19](概観論文)	
再構成	Daido-Kang-Nakamura [3] Daido-Lei-Liu-Nakamura [4]	1次元、(時間入り) 探針法、 介在物 (inclusion)
	Isakov-Kim-Nakamura [16]	高次元、(時間入り) 探針法、介在物
	Kim-Nakamura [17]	熱伝導係数が関数、(時間入り) 探針法
	Gaitan-Isozaki-Poisson-Siltanen-Tamminen [7]	熱伝導係数が関数 (時間入り) 探針法? (よくわからない)
再構成	Ikehata [10]	1次元、一回観測
囲い	Ikehata and Kawashita [11]	3次元、空洞、無限回観測
込み	Ikehata and Kawashita [12]	3次元、介在物、無限回観測、一回観測 (I)
法	Ikehata and Kawashita [13]	3次元、一回観測 (II)

この講演では熱方程式に対する境界値逆問題を囲い込み法の立場から調べた [13] とレゾルベントの漸近挙動について考察した [14] について紹介します²。

2 熱方程式に対する囲い込み法

囲い込み法の大きな流れは次の通りです。

第1段：観測データ $\mathcal{E}_X$ から指示関数 (indicator function) $I(\lambda)$ を作る。

第2段：指示関数 $I(\lambda)$ の $\lambda \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動を調べ、 ∂D の情報を引き出す。

¹これ以外にも挙げるべき文献があると思います。ご存知の方は文献をご教示頂ければ幸いです。

²上の「一回観測 (I)、(II)」の違いについては後に述べます。

囲い込み法は池畠 [9], [8] により Laplace 方程式に対する境界値逆問題において導入されました。囲い込み法には指示関数の導入法が比較的単純で直感的に分かりやすく、一回観測の場合も定式化は容易にできるという利点があります。一方で ∂D 自体が分かるわけではないという弱点もあります。この弱点を克服するという方向の研究も多く見受けられますが、それらについては触れません。ここでは熱方程式に対する囲い込み法について考えます。

熱方程式に対する指示関数 $I(\lambda)$ の導入方法 Ω 上で $(\Delta - \lambda^2)v(x; \lambda) = 0$ を満たす関数 $v(x; \lambda)$ を一つ選びます。熱流 $f \in X$ に対し、境界条件 $\partial_\nu u|_{(0,T) \times \partial\Omega} = f$ を満たす (1.1) の解 $u = u_f$ と $v(x; \lambda)$ を用いて指示関数 $I(\lambda)$ を次で定めます。

$$I(\lambda) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} e^{-\lambda^2 t} (\partial_\nu v(x; \lambda) u_f(t, x) - v(x; \lambda) \partial_\nu u_f(t, x)) dS_x dt. \quad (2.1)$$

観測データより $[0, T] \times \partial\Omega$ 上での f と u_f は既知であることおよび $v(x; \lambda)$ は任意に選べることに注意すれば (2.1) で定めた $I(\lambda)$ は計算可能な量であることが分ります。

(2.1) の形を見れば無限回観測を許すときはどのような $f = f_\lambda$ を与えれば良いかが分ります。例えば $\omega \in S^2$ を一つ選び、 $v(x; \lambda) = e^{\lambda \omega \cdot x}$ とおきます。[11] にあるように $f_\lambda(x) = e^{\lambda \omega \cdot x}$ とおくと $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\lambda} \log |I(\lambda)| = \sup_{x \in \bar{D}} \omega \cdot x$ が得られます（これが囲い込み法の基本形です）。そ

の他にも $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, $y \in \mathbb{R}^3$ を止める毎に $\inf\{|y - p| \mid y \in D\}$ や $\sup\{|x - y| \mid x \in D\}$ が得られるようにも設定できます。

前ページの表における [12] の**一回観測 (I)** とは一回観測、すなわち $X = \{f\}$ ですが、指示関数 $I(\lambda)$ を無限回観測のときと同じ発想で導入した場合のことを指します。具体的には $v(x; \lambda)$ を (E) の境界条件を $\partial_{\nu_x} \phi = g(x; \lambda)$ に換えたもの、ただし

$$g(x; \lambda) = \int_0^T e^{-\lambda^2 t} f(t, x) dt \quad (2.2)$$

としたときの解として選びます。このとき $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\lambda} \log |I(\lambda)| = \text{dist}(D, \partial\Omega)$ が得られます³。

一回観測 (I) のときは指示関数を定めるときの $v(x; \lambda)$ を観測データ f (i.e. $u_f(t, x)$) に連動させて選びました。それとは異なり $v(x; \lambda)$ を f とは無関係に選んだ場合が**一回観測 (II)** です。一次元のときは $\Omega = (0, L)$, $D = (a, b)$ とすると $\Omega \setminus \bar{D} = (0, a) \cup (b, L)$ となるので、 $(0, a)$ において境界 $x = 0$ は既知、 $x = a$ が未知で、既知の境界において熱流は $f(t, 0) = f(t)$ で与えられると考えればよいことになります。 $p < 0$ を一つ選びます。Ikehata [10] は $v(x; \lambda) = e^{\lambda(p-x)}$ と選び、次を示しました⁴。

Ikehata [10] $f \in C^1([0, T])$, $f(0) \neq 0$ ならば $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-1}{\lambda} \log |I(\lambda)| = 2a - p$ となる。

熱流 f に対する仮定は f に対し、(2.2) で定まる関数 $g(\lambda)$ の下からの評価を保証するために必要です。この場合は $2^{-1}|f(0)| \leq \lambda^2 |g(\lambda)| \leq 2|f(0)|$ ($\lambda \gg 1$) が成り立ちます。

目標は Ikehata [10] の結果を 3 次元の場合に拡張することにあります。 $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ を一つ選び、上の考え方に倣って、指示関数 $I(\lambda)$ を

$$v(x; \lambda) = E_\lambda(x, p) \left(:= \frac{e^{-\lambda|x-p|}}{2\pi|x-p|} \right)$$

と選ぶことにより定めます。与えられた熱流 f に対して (2.2) で $g(x; \lambda)$ を作り、(R) において $g(x) = g(x; \lambda)$ としたときの解を $w(x; \lambda)$ とおきます。このとき一次元のときと同様にす

³ D の情報 “ $\text{dist}(D, \partial\Omega)$ ” は囲い込み法で初めて得られました。

⁴ この事実是一次元のときは一回観測で D が求まることを示しています。

れば

$$I(\lambda) = \int_{\partial D} (\partial_{\nu_x} E_\lambda(x, p)) w(x, \lambda) dS_x + O(e^{-\lambda^2 T/2}) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

となります。上の等式よりレゾルベントと指示関数との間には関係があることが分ります。この講演では具体的にどのような関係があるのかについて報告します。

References

- [1] K. Bryan and L. F. Caudill, Jr., Uniqueness for a boundary identification problem in thermal imaging, In: Differential Equations and Computational Simulations III J. Graef, R. Shivaji, B. Soni J. and Zhu (Editors), Electronic Journal of Differential Equations, Conference 01(1997), pp. 23-39, URL:<http://www.ma.hw.ac.uk/EJDE/index.html>
- [2] B. Canuto, E. Rosset and S. Vessella, Quantitative estimate of unique continuation for parabolic equations and inverse initial-boundary value problems with unknown boundaries, Trans. Amer. Math. Soc., **354**(2002), 491-535.
- [3] Daido, Y., Kang, H. and Nakamura, G., A probe method for the inverse boundary value problem of non-stationary heat equations, Inverse Problems, **23**(2007), 1787-1800.
- [4] Daido, Y., Lei, Y., Liu, J.J. and Nakamura, G., Numerical implementations of dynamical probe method for non-stationary heat equation, Applied Mathematics and Computation, **211**(2009), 510-521.
- [5] Dautray, R. and Lions, J-L., Mathematical analysis and numerical methods for sciences and technology, Evolution problems I, Vol. **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [6] Elayyan, A. and Isakov, V., On uniqueness of recovery of the discontinuous conductivity coefficient of a parabolic equation, SIAM J. Math. Anal., **28**(1997), 49-59.
- [7] P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen and J. P. Tamminen, Probing for inclusions in heat conductive bodies, (preprint).
- [8] M. Ikehata, Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data, Inverse Problems, **15** (1999), 1231-1241.
- [9] M. Ikehata, Reconstruction of the support functions for inclusion from boundary measurements, J. Inv. Ill-Posed Problems, **8** (2000), 367-378.
- [10] M. Ikehata, Extracting discontinuity in a heat conductive body. One-space dimensional case, Applicable Analysis, **86** (2007), 963-1005.
- [11] Ikehata, M. and Kawashita, M., The enclosure method for the heat equations, Inverse problem **25** (2009) 075005.
- [12] Ikehata, M. and Kawashita, M., On the reconstruction of inclusions in a heat conductive body from dynamical boundary data over a finite time interval. Inverse Problems **26** (2010), no. 9, 095004.
- [13] Ikehata, M. and Kawashita, M., An inverse problem for a three-dimensional heat equation in thermal imaging and the enclosure method, preprint.
- [14] Ikehata, M. and Kawashita, M., Estimates of the integral kernels arising inverse problems for a three-dimensional heat equation in thermal imaging, preprint.
- [15] Ikehata, M. and Kawashita, M., Asymptotic behavior of the solutions for Laplacian with the inhomogeneous Robin type conditions in bounded domains ..., in preparation.
- [16] V. Isakov, K. Kim and G. Nakamura, Reconstruction of an unknown inclusion by thermography, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) **9** (2010), 725-758.
- [17] K. Kim and G. Nakamura, Inverse boundary value problem for anisotropic heat operators, J. Physics, Conference Series, 290 (2011) 012007.
- [18] Vessella, S., Stability estimates in an inverse problem for a three-dimensional heat equation, SIAM J. Math. Anal., **28**(1997), 1354-1370.
- [19] S. Vessella, Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations, determination of unknown time-varying boundaries and optimal stability estimates, Inverse Problems **24** (2008) 023001
- [20] Varadhan, S. R. S., On the behaviour of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, Commun. Pure. Appl. Math., **20**(1967), 431-455.