Allen-Cahn 方程式に対する境界単調性公式

水野 将司 (日本大学理工学部)

次の Neumann 境界条件における Allen-Cahn 方程式を考える:

$$
\text{(AC)} \qquad \begin{cases} \varepsilon u_t^\varepsilon - \varepsilon\Delta u^\varepsilon + \dfrac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, & t>0,\ x\in\Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, & t>0, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon, & x\in\Omega, \end{cases}
$$

ただし, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界領域, ν は $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトル, $\varepsilon>0$ はパラメータ, $W(u)=(1-u^2)^2$ とする. Allen-Cahn 方程式は Modica-Mortola 問題のエネルギー汎関数

$$
E_\varepsilon[u] := \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u)\right)\,dx
$$

の勾配流である.

$\varepsilon>0$ に対して (AC) は一意解を持ち, $\varepsilon\to 0$ とすると, 平均曲率流方程式をみたす界面を生成することが知られている. より正確には, Ilmanen [6] によって, エネルギー汎関数から決まる測度 μ_t^ε が, $\varepsilon\to 0$ である Radon 測度 μ_t に収束し, この Radon 測度が平均曲率流方程式の Brakke 解となることが知られている. この界面の正則性を調べるためには, (AC) に対する Huisken の単調性公式が重要な役割をはたす.

Neumann 境界条件から, 生成される界面は境界に対して直交し, 余次元が 2 の部分多様体となっていると考えられる. そこで, μ_t と μ_t^ε に対する境界挙動を考察する. 境界の正則性を調べるためには, やはり Huisken の単調性公式が重要であるため, 本講演では, エネルギー測度に対する境界単調性公式を導出する.

内部単調性公式は多くの結果が知られているが, 境界単調性公式はあまり多くの結果は知られていない. Allard [1] はヴァリフォールドの第一変分と境界の正則性を単調性公式を用いて研究し, Grüter-Jost [4] によって, 自由境界問題に拡張した. Chen-Lin [3] は Dirichlet 境界条件下での調和写像流の境界単調性公式を導出し, 境界正則性を研究した. また, Neumann 境界条件下で定常の Allen-Cahn 方程式に対して, Tonegawa [8] が単調性公式を導出し, 密度の評価を与えた. 本講演では, Neumann 境界条件における発展 Allen-Cahn 方程式に対して, 境界単調性公式を導出する.

主定理を述べるために, 次を仮定する:

(A1) ある定数 $M>0$ が存在して, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, 初期値 u_0^ε は

$$
\|u_0^\varepsilon\|_\infty \le M, \qquad \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_0^\varepsilon|^2 + \frac{W(u_0^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\,dx \le M
$$

をみたす (エネルギーの有界性).

本研究は, 利根川吉廣教授との共同研究である.

(A2) 領域 Ω は凸とする. すなわち, $\partial\Omega$ の主曲率はすべて負とする.
(A3) 初期値 u_0^ε は

$$\frac{\varepsilon|\nabla u_0^\varepsilon|^2}{2}-\frac{W(u_0^\varepsilon)}{\varepsilon}\leq 0$$

をみたす (ディスクレパンシーの非正値性).

修正したエネルギー測度 μ_t^ε とディスクレパンシー Radon 測度 ξ_t^ε を

$$d\mu_t^\varepsilon:=\left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2+\frac{\tilde{W}(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)dx,\qquad d\xi_t^\varepsilon:=\left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2-\frac{\tilde{W}(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)dx$$

で定義する. ただし, $\tilde{W}(u^\varepsilon)=W(u^\varepsilon)+\varepsilon M$ とする. $x\in\Omega$ を $\partial\Omega$ に十分に近い点とすると, $\zeta(x)\in\partial\Omega$ が一意に存在して $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)=|x-\zeta(x)|$ をみたす. この $\zeta(x)$ を用いると, x の $\partial\Omega$ における反射点 $\tilde{x}$ を

$$\tilde{x}:=2\zeta(x)-x=\zeta(x)+(\zeta(x)-x)$$

で定めることができる. $\eta\geq 0$ を滑らかなカットオフ関数である $r>0$ に対して $0\leq\eta\leq\chi_{[0,r]}$ をみたすとする. $s>0$ と $y\in\Omega$ に対して, 後向き熱核と反射後ろ向き熱核を $0<t<s$ と $x\in\Omega$ に対して

$$\rho=\rho_{(s,y)}(t,x):=\frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}\right),$$
$$\tilde{\rho}=\tilde{\rho}_{(s,y)}(t,x):=\frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}}\exp\left(-\frac{|\tilde{x}-y|^2}{4(s-t)}\right)$$

で定める.

定理 1 (利根川吉廣教授との共同研究)**.**
(A1)–(A3) を仮定し, $\varepsilon>0$ に対して, u^ε を (AC) の解とし, $r>0$ は十分に小さいとする. 任意の $y\in\partial\Omega$ に対して, n,r,M と $\partial\Omega$ の形状に依存する $C_1,\,C_2>0$ が存在して

$$\frac{d}{dt}\Bigg(\exp\left(C_1(s-t)^{\frac14}\right)\int_\Omega(\rho\eta(|x-y|)+\tilde{\rho}\eta(|\tilde{x}-y|))\,d\mu_t^\varepsilon + C_2\int_t^s\exp\left(C_1(s-\tau)^{\frac14}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{s-\tau}}\right)d\tau\Bigg)\leq\exp\left(C_1(s-t)^{\frac14}\right)\int_\Omega\frac{\rho\eta(|x-y|)+\tilde{\rho}\eta(|\tilde{x}-y|)}{2(s-t)}\,d\xi_t^\varepsilon \tag{0.1}$$

が $0<t<s$ に対して成り立つ.

単調性公式から, Gaussian 密度が境界まで有界であることがわかる. 単調性公式は平均曲率流方程式の Brakke 解の存在, とりわけ, ディスクレパンシー測度の消滅について重要な役割をはたす. 境界近傍を含めて Brakke 解の存在を示せると, Kasai-Tonegawa [7] の内部正則性の結果を境界まで拡張することが自然と考えられ, 今後の課題となる (cf. Brakke [2]).

境界単調性公式に反射を用いる理由を説明する. 定常問題に対する単調性公式を示すには, μ_t^ε の第一変分を計算するが, 発展 Allen-Cahn 方程式では積分曲線を考えることに相当

する. そこで, Ω 上のスカラー場 $\phi = \phi(t,x)$ の μ_t^ε に関する積分の時間微分を考える. このとき, Neumann 境界条件に注意して部分積分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \phi\, d\mu_t^\varepsilon = -\varepsilon \int_\Omega \phi \left(\Delta u^\varepsilon - \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla\phi}{\phi}\right)^2 dx \\ + \int_\Omega \left(\frac{(p\cdot\nabla\phi)^2}{\phi} + \left(I - p\otimes p, D^2\phi\right)_{Mat(n,\mathbb{R})}\right) d\mu_t^\varepsilon \\ + \int_\Omega \left(\frac{(p\cdot\nabla\phi)^2}{\phi} - \left(p\otimes p, D^2\phi\right)_{Mat(n,\mathbb{R})}\right) d\xi_t^\varepsilon \\ + \int_\Omega \phi_t\, d\mu_t^\varepsilon - \int_{\partial\Omega}\left(\frac{|\nabla u^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nabla\phi\cdot\nu\, d\sigma\end{aligned}$$

が得られる. 内部単調性公式を導くときには, 境界積分はスカラー場の台のコンパクト性を仮定すれば無視することができるが, 境界単調性公式では, 台のコンパクト性を仮定できない. そこで, かわりに $\partial\Omega$ 上で $\nabla\phi\cdot\nu \equiv 0$ を仮定する. これを μ_t^ε の第一変分としての言葉で述べると, 境界の接方向のみの変分ベクトル場を考えることに相当する. そして, 反射後向き熱核を用いると

$$\nabla(\rho+\tilde\rho)\cdot\nu\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

となり, 境界積分を無視することができ, Ilmanen [6] の手法を適用できる. このときに, 右辺の μ_t^ε に関する積分は, 曲率の影響はあるものの t に関して可積分となるが, ξ_t^ε に関する積分は時間に関して可積分にならない. そこで, 境界の主曲率が負であることを使って, ディスクレパンシー測度 ξ_t^ε が負となることを示す. このことにより, Gronwall の不等式を適用できて, 境界単調性公式が従う. なお, 内部単調性公式には領域の凸性は必要ないが (cf. Hutchinson-Tonegawa [5]), 境界単調性公式を導くためには, この仮定ははずすことができないと思われる.

References

[1] W. K. Allard, *On the first variation of a varifold: boundary behavior*, Ann. of Math. (2) **101** (1975), 418–446.

[2] K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Mathematical Notes, vol. 20, Princeton University Press, 1978.

[3] Y.-M. Chen and F.-H. Lin, *Evolution of harmonic maps with Dirichlet boundary conditions*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), 327–346.

[4] M. Grüter and J. Jost, *Allard type regularity results for varifolds with free boundaries*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **13** (1986), 129–169.

[5] J. E. Hutchinson and Y. Tonegawa, *Convergence of phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory*, Calc. Var. Partial Differential Equations **10** (2000), 49–84.

[6] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom. **38** (1993), 417–461.

[7] K. Kasai and Y. Tonegawa, *A general regularity theory for weak mean curvature flow*, preprint.

[8] Y. Tonegawa, *Domain dependent monotonicity formula for a singular perturbation problem*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 69–83.