

Splitting methods for semilinear evolution equations, with applications to nonlinear Schrödinger equations

太田 雅人 (東京理科大学 理学部)¹

X を Hilbert 空間, A を m -dissipative operator in X とし, 初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u = Au + F(u), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases} \quad (1)$$

を考える. ここで, $F : D(A) \rightarrow D(A)$ は次をみたすとする.

(F0) $F(0) = 0$.

(F1) $\|F'(v)w\|_{D(A)} \leq L(\|v\|_{D(A)})\|w\|_{D(A)} \quad \forall v, w \in D(A)$.

(F2) $\|F(v)\|_{D(A^2)} \leq L_2(\|v\|_{D(A)})\|v\|_{D(A^2)}, \quad \forall v \in D(A^2)$.

(F3) $\|F(v) - F(w)\|_{D(A^2)} \leq L_3(\|v\|_{D(A^2)} \vee \|w\|_{D(A^2)})\|v - w\|_{D(A^2)}, \quad \forall v, w \in D(A^2)$.

(F4) $\|F'(v)w\|_X \leq L_4(\|v\|_{D(A)})\|w\|_X, \quad \forall v, w \in D(A)$.

(F5) $\|F''(v)(w, w)\|_X \leq L_5(\|v\|_{D(A)})\|w\|_{D(A)}\|w\|_X, \quad \forall v, w \in D(A)$.

ここで, $L, L_2, \dots, L_5 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は非減少関数である.

注意 1 (F0), (F1) より, 次が成り立つ.

(F6) $\|F(v) - F(w)\|_{D(A)} \leq L(\|v\|_{D(A)} \vee \|w\|_{D(A)})\|v - w\|_{D(A)}, \quad \forall v, w \in D(A)$.

(F7) $\|F(v)\|_{D(A)} \leq L(\|v\|_{D(A)})\|v\|_{D(A)}, \quad \forall v \in D(A)$.

例 2 (非線形 Schrödinger 方程式) $X = L^2(\mathbb{R}^N)$, $D(A) = H^2(\mathbb{R}^N)$, $Au = i\Delta u$, $F(u) = i\alpha|u|^{2k}u$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると, $N \leq 3$ のとき, (F0)–(F5) が成り立つ.

次はよく知られている (たとえば, [2], Section 4.3 参照).

命題 3 (F0), (F1) を仮定する. このとき, 任意の $u_0 \in D(A)$ に対して, 次をみたす $T_{\max}(u_0) \in (0, \infty]$, $u \in C([0, T_{\max}(u_0)), D(A))$ が存在する. 任意の $T \in (0, T_{\max}(u_0))$ に対して, u は (1) の一意解であり, 次のどちらかが成り立つ.

(i) $T_{\max}(u_0) = \infty$, (ii) $T_{\max}(u_0) < \infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T_{\max}(u_0)} \|u(t)\|_{D(A)} = \infty$.

さらに, $u_0 \in D(A^2)$ ならば, $u \in C([0, T_{\max}(u_0)), D(A^2)) \cap C^1([0, T_{\max}(u_0)), D(A))$.

¹mohta@rs.tus.ac.jp

$u_0 \in D(A)$ に対して, (1) の解を $u(t) = S^t u_0$ とかく. また, A によって生成される縮小半群を Φ_A^t で表し, $w_0 \in D(A)$ に対して, 初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t w = F(w), & t \in [0, T], \\ w(0) = w_0 \in D(A) \end{cases}$$

の解を $w(t) = \Phi_F^t w_0$ とかく. さらに, $\Psi^t v_0 = \Phi_A^{t/2} \Phi_F^t \Phi_A^{t/2} v_0$ と定める.

定理 4 (F0)–(F5) を仮定する. $u_0 \in D(A^2)$, $T \in (0, T_{\max}(u_0))$ とし

$$m_0 := 2 \max_{t \in [0, T]} \|S^t u_0\|_{D(A)}$$

とおく. このとき, $T, m_0, \|u_0\|_{D(A^2)}$ のみに依存する正定数 h_0 が存在して, 任意の $h \in (0, h_0]$ 及び $nh \leq T$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|(\Psi^h)^n u_0\|_{D(A)} &\leq m_0, & \|(\Psi^h)^n u_0\|_{D(A^2)} &\leq e^{\gamma_1 n h} \|u_0\|_{D(A^2)}, \\ \|S^{nh} u_0 - (\Psi^h)^n u_0\|_{D(A)} &\leq \kappa_1 h \|u_0\|_{D(A^2)}, \\ \|S^{nh} u_0 - (\Psi^h)^n u_0\|_X &\leq \kappa_2 h^2 \|u_0\|_{D(A^2)}. \end{aligned}$$

ここで, γ_1 は m_0 のみに, κ_1, κ_2 は T, m_0 のみに依存する正定数である.

注意 5 上の定理 4 は非線形 Schrödinger 方程式に対する splitting method の誤差評価を考察した論文 [1, 4] を抽象化・一般化したものである. また, 証明の要である $\|(\Psi^h)^n u_0\|_{D(A)}$ の一様評価に関しては, KdV 方程式などを考察した最近の論文 [3] を参考にした.

参考文献

- [1] C. Besse, B. Bidégaray and S. Descombes, Order estimates in time of splitting methods for the nonlinear Schrödinger equation, *SIAM J. Numer. Anal.* **40** (2002), 26–40.
- [2] T. Cazenave and A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [3] H. Holden, C. Lubich and N. H. Risebro, Operator splitting for partial differential equations with Burgers nonlinearity, preprint, arXiv:1102.4218.
- [4] C. Lubich, On splitting methods for Schrödinger-Poisson and cubic nonlinear Schrödinger equations, *Math. Comp.* **77** (2008), 2141–2153.