一般化ヤコビ楕円関数とその応用

竹内 慎吾 （芝浦工大）

1 一般化三角関数

$p,\ q > 1$ を定数とし，$x \in [0,1]$ に対して

$$\operatorname{arcsin}_{pq} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[p]{1-t^q}}$$

と定義する．その逆関数を一般化三角関数 $\sin_{pq} x$ という (例えば P. Lindqvist (1995), P. Drábek-R. Manásevich (1999))．すなわち，$\sin_{pq} : [0, \pi_{pq}/2] \to [0,1]$ は全単射かつ単調増加，ここで

$$\pi_{pq} = 2 \operatorname{arcsin}_{pq} 1 = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[p]{1-t^q}}.$$

特に $\sin_{22} x = \sin x,\ \pi_{22} = \pi$ である．関数 $\sin_{pq} x$ を，$\sin x$ のように周期 $2\pi_{pq}$ の奇関数として $\mathbb{R}$ 全体に拡張したものを，改めて $\sin_{pq} x$ と表す．

関数 $y = \sin_{pq} x$ は微分方程式

$$(|y'|^{p-2}y')' + \frac{(p-1)q}{p}|y|^{q-2}y = 0$$

を満たす．したがって有名な (p,q)-固有値問題

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + \lambda |u|^{q-2}u = 0, \quad 0 < x < L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

の非自明解 $(\lambda, \pm u)$ は，$\sin_{pq} x$ を用いて次のように書き表すことができる：任意の $n \in \mathbb{N},\ R > 0$ に対して

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_n(R) = \dfrac{(p-1)q}{p}\left(\dfrac{n\pi_{pq}}{L}\right)^p R^{p-q}, \\ u = u_{n,R}(x) = R \sin_{pq}\left(\dfrac{n\pi_{pq}}{L}x\right). \end{cases}$$

2 一般化ヤコビ楕円関数

$\sin_{pq} x$ に合わせて，講演者はヤコビ楕円関数 $\operatorname{sn}(x,k)$ を次のように一般化した．$p,\ q > 1$ を定数とし，$x \in [0,1],\ k \in [0,1)$ に対して

$$\operatorname{arcsn}_{pq}(x,k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[p]{(1-t^q)(1-k^q t^q)}}$$

と定義する．その逆関数を $\mathrm{sn}_{pq}(x,k)$ で表す．すなわち，$\mathrm{sn}_{pq} : [0, K_{pq}(k)] \to [0,1]$ は全単射かつ単調増加，ここで

$$K_{pq}(k) = \mathrm{arcsn}_{pq}(1,k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[p]{(1-t^q)(1-k^q t^q)}}.$$

特に $\mathrm{sn}_{22}\,(x,k) = \mathrm{sn}\,(x,k)$, $K_{22}(k) = K(k)$ (第１種完全楕円積分) であり，$p > 2$ のとき

$$\sin_{pq} x \quad \xleftarrow[k\to+0]{} \quad \mathrm{sn}_{pq}(x,k) \quad \xrightarrow[k\to 1-0]{} \quad \sin_{\frac{p}{2},q} x \tag{1}$$

$$\frac{\pi_{pq}}{2} \quad \xleftarrow[k\to+0]{} \quad K_{pq}(k) \quad \xrightarrow[k\to 1-0]{} \quad \frac{\pi_{\frac{p}{2},q}}{2}. \tag{2}$$

関数 $\mathrm{sn}_{pq}(x,k)$ を，$\sin x$ のように周期 $4K_{pq}(k)$ の奇関数として $\mathbb{R}$ 全体に拡張したものを，改めて $\mathrm{sn}_{pq}(x,k)$ と表す.

関数 $y = \mathrm{sn}_{pq}(x,k)$ は微分方程式

$$(|y'|^{p-2}y')' + \frac{(p-1)q}{p}|y|^{q-2}y(1+k^q-2k^q|y|^q) = 0$$

を満たす．したがって境界値問題

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + \lambda|u|^{q-2}u(1-|u|^q) = 0, \quad 0 < x < L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

の非自明解 (λ, u) を，$\mathrm{sn}_{pq}(x,k)$ を用いて次の主結果にあるように書き表せる．

3 主結果

境界値問題 (3) の非自明解 $(\lambda, \pm u)$ で $\|u\|_\infty < 1$ を満たすものは以下で表される：任意の $n \in \mathbb{N}$, $k \in (0,1)$ に対して

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_n(k) = \dfrac{(p-1)q}{p}(1+k^q)\left(\dfrac{2k^q}{1+k^q}\right)^{\frac{p}{q}-1}\left(\dfrac{2nK_{pq}(k)}{L}\right)^p, \\ u = u_{n,k}(x) = \left(\dfrac{2k^q}{1+k^q}\right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{sn}_{pq}\left(\dfrac{2nK_{pq}(k)}{L}x, k\right). \end{cases}$$

$1 < p \leq 2$ の場合，非自明解はこれ以外に存在しない．一方，$p > 2$ の場合は，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$k \to 1-0$ とすると (1), (2) より $\lambda_n(k)$, $u_{n,k}(x)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{2(p-1)q}{p}\left(\dfrac{n\pi_{\frac{p}{2},q}}{L}\right)^p, \\ u = \sin_{\frac{p}{2},q}\left(\dfrac{n\pi_{\frac{p}{2},q}}{L}x\right) \end{cases} \tag{4}$$

に収束する．この解は $\|u\|_\infty = 1$ を満たす．また，L の代わりに $L-\ell$ $(0 < \ell < L)$ としたときの (3) の解 (4) を利用して，$\|u\|_\infty = 1$ を満たす連続体濃度の (4) の多重解を構成できる．以上ですべての解が得られる．さらに，(4) の関数 u はその解表示から $(\frac{p}{2}, q)$-固有関数でもあることがわかる．詳しくは講演で述べる．