非線形方程式で表現されるヘンリーの法則を伴う１次元コンクリート中性化問題について

愛木豊彦（岐阜大学・教育学部）
e-mail: aiki@gifu-u.ac.jp

本研究は，オランダ・Technical University of Eindhoven の Muntean 教授との共同研究である。コンクリートの中性化現象については，ヒステリシスを考慮した 3 次元数理モデル ([1] 参照) も研究されているが，ここでは，下記の 1 次元空間における初期値境界値問題を扱う。まず，$0 < T < \infty$ に対し，中性化領域が $Q_s(T) := \{(t,x) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$ と表されるものとする。ここで，$x = s(t)$ on $[0,T]$ は，時刻 t での中性化の深さを表す。また，コンクリートが含む水分中の二酸化炭素濃度 u, 空気中の二酸化炭素濃度 v を，$Q_s(T)$ 上の関数として定義する。そして，これら s, u, v が以下を満たすものとする。

$$u_t - (\kappa_1 u_x)_x = f(u,v), v_t - (\kappa_2 v_x)_x = -f(u,v) \text{ in } Q_s(T), \tag{1}$$

$$u(t,0) = g(t), v(t,0) = h(t) \quad \text{for } 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$s'(t) = \alpha\psi(u(t,s(t))) \quad \text{for } 0 < t < T, \tag{3}$$

$$-\kappa_1 u_x(t,s(t)) = \psi(u(t,s(t))) + s'(t)u(t,s(t)) \quad \text{for } 0 < t < T, \tag{4}$$

$$-\kappa_2 v_x(t,s(t)) = s'(t)v(t,s(t)) \quad \text{for } 0 < t < T, \tag{5}$$

$$s(0) = s_0 \text{ and } u(0,x) = u_0, v(0,x) = v_0 \quad \text{for } 0 < x < s_0, \tag{6}$$

ここで，$f(u,v) = \beta(\gamma v - u)$ (γ は正定数で，β は $\mathbb{R}$ 上の単調増加な連続関数)，κ_1 と κ_2 は拡散係数，g と h は境界値，$\psi(r) = |[r]^+|^p$, $p > 1$ と α はそれぞれ反応速度を示す指数と定数，s_0, u_0, v_0 はそれぞれ s, u, v の初期値である。以下，この問題を P と表す。

問題 P に対するモデリングは [3] でも紹介しているが，もともとは，[6] や [7] で Muntean らによって研究されていたものである。彼らが考えていた問題では，二酸化炭素濃度に加え，水分量と炭酸化カルシウム，水酸化カルシウムの量も未知関数としている。そのため，問題が複雑になり，解の存在を示すために強い条件が必要であった。そこで，中性化過程において，最も主要な役割を果たす二酸化炭素濃度だけに注目したモデルについて考察することにした。

問題 P に関するこれまでの結果を紹介する。まず，[2] で，$u_0, v_0 \in L^\infty$，f がリプシッツ連続の場合，局所解の存在と一意性を示し，さらに，$f(u,v) = b(\gamma v - u)$ (b は正定数，つまり β が線形の場合) で，$u_0 \ge 0$, $v_0 \ge 0$ を仮定すれば，解の大域的存在も示した。また，[4, 5] では，g と h が時間に依存しなければ,

$$c\sqrt{t} \le s(t) \le C'\sqrt{t+1} \text{ for } t \ge 0,$$

が成り立つことを示している。土木工学では，実験結果からコンクリートの中性化速度を $s(t) = C\sqrt{t}$ とみなし，建物の危険性などの評価を行っているようである。この不等式は，その実験結果が正しいことを，数理モデルを用いて示したとみなせる。

本講演の目的の一つはヘンリーの法則の取り扱いである。ヘンリーの法則によれば,「気体の溶ける量は，接している気体の圧力に比例する」ので，定常状態では，u は圧力 p に比例する。ここで，二酸化炭素が理想気体であるとすると，$pv = nRT$ より，p は v に比例する。従って，

定常状態では，u は v に比例する。従って，このことが時間無限大のときに，実現するものと考え，(1), (2) の右辺として，$f(u,v) = b(\gamma v - u)$ を考えてきた。そこで，その一般化として，$f(u,v) = \beta(\gamma v - u)$，ただし，$\beta$ は単調増加な連続関数，の場合を考える。また，本講演では境界条件が時間に依存しても，自由境界の時間無限大の挙動が成り立つことも示す。これら二つのことを合わせたのが，次の主定理である。

定理 (A.- Muntean) 以下の (A1) $\sim$ (A3) を仮定する。
(A1) $f(u,v) = \beta(\gamma v - u)$, $\beta(0) = 0$, β は単調増加な連続関数で

$$\beta(r)r \geq C_\beta |r|^{1+q} \text{ for } r \in \mathbb{R}, \quad q \geq 1.$$

(A2) $g, h \in W^{1,2}_{loc}([0,\infty)) \cap L^\infty(0,\infty)$, $g - g_*, h - h_* \in L^2(0,\infty)$, ただし g_*, h_* は $\gamma h_* = g_*$ を満たす正定数である。
(A3) $u_0, v_0 \in L^\infty(0, s_0)$, $u_0, v_0 \geq 0$ on $(0, s_0)$.
このとき，問題 P は $[0,\infty)$ 上の一意解 $\{s,u,v\}$ をもつ。さらに，以下の不等式を満たす正定数 c と C が存在する:

$$c\sqrt{t} \leq s(t) \leq C\sqrt{t+1} \quad \text{for } t \geq 0.$$

今後数理モデルに非定常なヘンリーの法則を採用する際，この定理がそれを表す関数を定める指針になるものと考えている。

参考文献

[1] T. Aiki, K. Kumazaki, Mathematical model for hysteresis phenomenon in moisture transport of concrete carbonation process, to appear in Physica B.

[2] T. Aiki, A. Muntean, Existence and uniqueness of solutions to a mathematical model predicting service life of concrete structures, Adv. Math. Sci. Appl., 19(2009), 109–129.

[3] T. Aiki, A. Muntean, Mathematical treatment of concrete carbonation process, Current Advances in Nonlinear Analysis and Related Topics, Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, Vol. 32, 2010, 231-238.

[4] T. Aiki, A. Muntean, Large time behavior of solutions to concrete carbonation problem, Communications on Pure and Applied Analysis, Vol. 9, (2010)1117-1129.

[5] T. Aiki, A. Muntean, A free-boundary problem for concrete carbonation: Rigorous justification of $\sqrt{t}$-law of propagation, submitted.

[6] A. Muntean, A moving-boundary problem: Modeling, analysis and simulation of concrete carbonation, Cuvillier Verlag, Götingen, 2006. PhD thesis, Faculty of Mathematics, University of Bremen, Germany.

[7] A. Muntean, M. Böhm, A moving-boundary problem for concrete carbonation: global existence and uniqueness of solutions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 350(1)(2009), 234-251.