

2次元円環領域における Liouville-Gel'fand 方程式の 非球対称解の構造

菅 徹

東京工業大学大学院 理工学研究科

Liouville-Gel'fand 方程式と呼ばれる以下の半線形楕円型方程式の Dirichlet 境界値問題について議論する.

$$(LG) \begin{cases} \Delta u + \lambda e^u = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

ここで $\lambda > 0$ は (分岐) パラメータであり, Ω_ε は $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2; \varepsilon < |x| < 1\}$$

で定義される 2 次元の円環領域である.

(LG) の解構造に関しては, まず [2, 3] において球対称解の構造が決定されている. より具体的には, (LG) の球対称解は分岐図上 $((\lambda, u)$ 平面上) で枝を成し, その枝は $(\lambda, u) = (0, 0)$ から出発して λ の大きい方へ伸び, その後一度だけ折り返して λ の小さい方へ伸び, $\lambda \rightarrow 0$ のとき解 u が全ての点で正の無限大に発散 (爆発) することが示されている. 非球対称解については, [2] において, 球対称解の枝上に無限個の分岐点があり, そこから非球対称な解が現れるということが示されている. [3] においても非球対称解の考察がなされており, 全ての自然数 k に対して, $2\pi/k$ 回転対称で $\int_\Omega e^u dx$ の値が大きいような非球対称解が得られている. 加えて [1] では, 与えられた自然数 k に対し, $\lambda \rightarrow 0$ のとき k 点爆発するような解を構成している ([1] では円環領域のみでなく一般の単連結でない 2 次元領域においてこの事実を示している).

これらの結果をまとめると (LG) の分岐図は下のようになる. この図から, 分岐した非球対称解は λ の小さい方へ伸び, $\lambda \rightarrow 0$ のとき正多角形の頂点で爆発すると予想される. この予想に対する証拠を提出することが本研究の目的となる. そのために特に円環の内径, 即ち ε が小さい場合について, 非球対称解の構造を考察する.

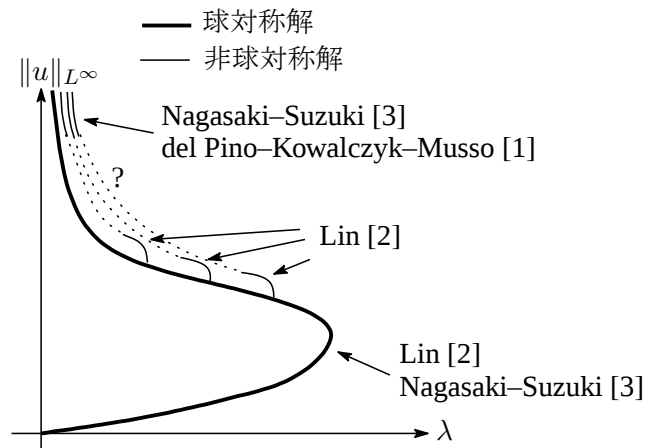


図 : (LG) の分岐図

接合漸展開法を用いた形式的計算によって, $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して次のような (LG) の近似解を得ることができる.

$$\lambda_\varepsilon = A\varepsilon^{\left(\frac{B}{2}-1\right)}, \quad u_\varepsilon(x) = \left(\frac{B}{2} - \frac{2}{B}\right) \log \varepsilon^{-1} + U\left(\varepsilon^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{B}\right)}x\right).$$

ただし $A > 0$ と $B \geq 2$ はパラメータであり, U は次の方程式の解である.

$$(LE) \quad \begin{cases} \Delta U + Ae^U = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ U(x) = \begin{cases} (B-2) \log |x| + o(1) & \text{as } |x| \rightarrow 0, \\ -(B+2) \log |x| + o(1) & \text{as } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \end{cases}$$

これが実際近似解になっていることは, まず $(\lambda, u) = (\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon)$ が (LG) の第 1 式を満たすことが容易に確かめられ, さらに $0 < \varepsilon \ll 1$ のとき, (LE) の第 2 式から,

$$\begin{aligned} |x| = 1 &\Rightarrow u_\varepsilon(x) \sim \left(\frac{B}{2} - \frac{2}{B}\right) \log \varepsilon^{-1} - (B+2) \log \varepsilon^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{B}\right)} = 0, \\ |x| = \varepsilon &\Rightarrow u_\varepsilon(x) \sim \left(\frac{B}{2} - \frac{2}{B}\right) \log \varepsilon^{-1} + (B-2) \log \varepsilon^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{B}\right)} = 0 \end{aligned}$$

となり境界条件も近似的に満たされることから分かる.

方程式 (LE) は次のような明示的な非球対称解を持つ.

$$(A, B, U) = (8k^2(1-\rho^2), 2k, U_{k,\rho,\gamma}),$$

$$U_{k,\rho,\gamma}(x) = \log \frac{1}{r^2 \{r^k + r^{-k} - 2\rho \cos(k\theta + \gamma)\}^2}.$$

ただし $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \rho < 1$, $\gamma \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ である. この解を基に, (LG) の非球対称解を構成することができる.

Theorem 1. $k = 2, 3, \dots$ と $0 < \rho < 1$, $\gamma \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ に対して, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき次の漸近展開を持つ (LG) の解 $(\lambda, u) = (8k^2(1-\rho^2)\varepsilon^{k-1}, u_\varepsilon)$ が存在する.

$$u_\varepsilon = \left(k - \frac{1}{k}\right) \log \frac{1}{\varepsilon} + U_{k,\rho,\gamma}\left(\varepsilon^{-\frac{k-1}{2k}} \cdot\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}\right) \quad \text{in } L^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

$k = 1$ に対応する解も, 近似解を修正することで得ることができる. この結果から, 分岐してきた非球対称解の構造に関する予想が, 少なくとも ε が小さいときに正しいことが示唆される.

References

- [1] M. del Pino, M. Kowalczyk and M. Musso, *Singular limits in Liouville-type equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **24** (2005), 47–81.
- [2] S.-S. Lin, *On non-radially symmetric bifurcation in the annulus*, J. Differential Equations **80** (1989), 251–279.
- [3] K. Nagasaki and T. Suzuki, *Radial and nonradial solutions for the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on annuli in $\mathbb{R}^2$* , J. Differential Equations **87** (1990), 144–168.