Possibility of the blow-up of solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems

小野 貴史

(東京理科大学大学院・理)

次の準線形退化型 Keller-Segel 系の初期値境界値問題の解の爆発の可能性について考える:

$$
\text{(KS)}\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(\varphi(u)\nabla u) - \nabla\cdot(\psi(u)\nabla v) & \text{in } B\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u & \text{in } B\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial B\times(0,\infty),\\
u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x\in B.
\end{cases}
$$

ここで $B := \{x\in\mathbb{R}^N;\ |x|<1\}$, $N\in\mathbb{N}$ $(N\geq 2)$, u_0, v_0 は非負値関数とし, φ, ψ には以下を仮定する:

(1) $\varphi\in C([0,\infty))\cap C^1((0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\varphi(0)=\psi(0)=0$, $\varphi,\psi>0$ on $(0,\infty)$;

(2) $\psi(\xi)/\varphi(\xi)\geq\xi^\alpha$ $\quad(\exists\,\alpha>2/N,\ \xi\geq\exists\,\xi_0>0)$.

問題 (KS) に関連する先行結果としては以下の 2 つが知られている.

(**I**) べき乗退化型 (Ishida-Yokota [**1**]): $B=\mathbb{R}^N$, $\varphi(u)=u^{m-1}$, $\psi(u)=u^{q-1}$ とし条件 (1) $[m>1,\ q\geq 2]$ 及び条件 (2) $[q>m+2/N]$ を仮定すると, 小さな初期値に対して (KS) の大域的弱解が存在する.

(**II**) 非退化型 (Winkler [**2**]): 条件 (1) で $\varphi(0)=0$ の代わりに $\varphi(0)>0$ (非退化型) を仮定し, さらに条件 (2) を仮定する. このときある $(u_0,v_0)\in\left(C^\infty(\overline{B})\right)^2$ に対して, $\overline{B}\times[0,T_0)$ $(0<T_0\leq\infty)$ 上の (KS) の古典解 (u,v) が存在し, $\overline{\lim}_{t\uparrow T_0}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B)}=\infty$ が成立する.

(**I**) では初期値が大きいときが未解決問題として残されており, (**II**) は非退化型なので (KS) には直接適用できない. 本研究の目的は (**I**) で残された未解決問題に解答を与えることである. ここでは次のような強解の存在を仮定することにより, 解の爆発を示唆する以下の主張が得られた.

定義. 以下の (a), (b), (c) をみたす (u,v) を $[0,T_0)$ $(0<T_0\leq\infty)$ 上の (KS) の**強解**という:

(a) $u\in C([0,T_0);L^\infty(B))\cap H^1(0,T;L^2(B))$, $\quad\nabla\cdot(\varphi(u)\nabla u)\in L^2(0,T;L^2(B))$ $\ (\forall\,T\in(0,T_0))$;

(b) $v\in C([0,T_0);L^\infty(B))\cap H^1(0,T;L^2(B))$, $\quad\Delta v\in L^2(0,T;L^2(B))$ $\ (\forall\,T\in(0,T_0))$;

(c) u,v は (KS) を a.e. でみたす.

主定理. $N\geq 2$ とし, φ,ψに対して (1), (2) 及び次の (3) を仮定する:

$$
(3)\qquad \varlimsup_{\xi\to 0}\psi(\xi)^2/\varphi(\xi)<\infty.
$$

さらに任意の初期値 $(u_0,v_0)\in(L^\infty(B))^2$ with $(\nabla\cdot(\varphi(u_0)\nabla u_0,\Delta v_0)\in\left(L^2(B)\right)^2$ に対して最大存在時刻 $T_0=T_0\left(\|u_0\|_{L^\infty(B)},\|v_0\|_{L^\infty(B)}\right)\in(0,\infty]$ と $[0,T_0)$ 上の (KS) の強解が存在すると仮定する. このときある初期値 $(u_0,v_0)\in\left(C^\infty(\overline{B})\right)^2$ に対して (KS) の強解 (u,v) で $\overline{\lim}_{t\uparrow T_0}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B)}=\infty$ をみたすものが存在する.

証明の方針は [**2**] と同様であり, 有界な大域解が存在すると仮定し矛盾を導くことである. 証明の鍵は有界な大域解のノルム評価を [**2**] と全く異なる方法で導くことである.

参考文献

[1] S. Ishida, T. Yokota, *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type with small data,* J. Differential Equations **252** (2012), 2469–2491.

[2] M. Winkler, *Does a 'volume-filling effect' always prevent chemotactic collapse?,* Math. Meth. Appl. Sci. **33** (2010), 12–24.