複素Ginzburg-Landau方程式に対する
コンパクト性の方法

横田 智巳　(東京理科大学·理学部)*

本講演は, Philippe Clément (Technical Univesity of Delft), 岡沢 登 (東京理科大学·理学部), 側島 基宏 (東京理科大学大学院·理学研究科D2) との共同研究に基づいている.

$N \in \mathbb{N}$ とし, 次の複素Ginzburg-Landau方程式に対する初期値問題について考える:

$$\text{(CGL)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (\kappa + i\beta)|u|^{q-2}u - \gamma u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで $u = u(x,t)$ は複素数値の未知関数で, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$,

$$\text{(1)} \qquad \lambda > 0, \quad \kappa > 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad q \geq 2$$

とする. 今回考えたいのは, 非線形項のべき q に上からの制限を付けない場合である. (CGL) の大域的強解 (後述の**定義**参照) の存在については, 全空間の場合には Ginibre-Velo [**1**, Proposition 5.1], 有界領域の場合には Okazawa-Yokota [**3**, Theorem 1.1] の結果があるが, そこでは $(\alpha/\lambda, \beta/\kappa)$ に対して次の条件が仮定されている:

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\kappa}\right) \in CGL\left(\frac{2\sqrt{q-1}}{q-2}\right).$$

ここで $CGL(y_0)$ $(0 < y_0 \leq \infty)$ は次で与えられる $\mathbb{R}^2$ の領域である:

$$CGL(y_0) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy \geq 0 \ \text{ or } \ \frac{|xy| - 1}{|x| + |y|} < y_0\right\}, \quad CGL(\infty) := \mathbb{R}^2.$$

しかし, [**1**] の証明は合成積による非線形項の正則化を必要とするために複雑であり, [**3**] の証明に使う抽象定理 [**3**, Theorem 4.1] は (有界領域における $(-\Delta)^{-1/2}$ のコンパクト性に相当する条件を必要とするので) (CGL) に直接適用できない.

本講演では, Okazawa-Yokota の抽象定理を直接適用できる以下の問題 $(\text{CGL})_R$ を考え, その解 $u_R(\cdot)$ の $R \to \infty$ としたときの極限により (CGL) の大域的強解 $u(\cdot)$ が容易に得られることを紹介したい:

$$(\text{CGL})_R \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\lambda + i\alpha)(-\Delta + V_R)u + (\kappa + i\beta)|u|^{q-2}u - \gamma u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで $V_R \in C^1(\mathbb{R}^N; [0,\infty))$ $(R \geq 0)$ は次のようにとる (無限遠方で発散する):

$$\text{(3)} \qquad V_R(x) := \begin{cases} (|x| - R)^2 & \text{if } |x| > R, \\ 0 & \text{if } |x| \leq R. \end{cases}$$

*e-mail: `yokota@rs.kagu.tus.ac.jp`

$(\mathrm{CGL})_R$ では $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap D(V_R^{1/2}) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ を満たす初期値を考える．ここで $D(V_R^{1/2}) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N);\ V_R^{1/2}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ は $(\cdot,\cdot)_{L^2} + (V_R^{1/2}\cdot, V_R^{1/2}\cdot)_{L^2}$ を内積にもつHilbert空間である．特に $V_R(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ であるから, $(-\Delta + V_R)^{-1}$ が (したがって $(-\Delta+V_R)^{-1/2}$ も) $L^2(\mathbb{R}^N)$ でコンパクトであることに注意する (例えばOkazawa [**2**, Theorem 4.1] 参照).

$(\mathrm{CGL})_R$ 及び (CGL) に対する大域的強解の定義と得られた結果は以下の通りである．

定義. 関数 $u(\cdot) \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N))$ は次の3条件を満たすとき, $(\mathrm{CGL})_R$ の**大域的強解**であるという:

(a) $u(t) \in H^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2(q-1)}(\mathbb{R}^N)$, $V_R u(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a.a. $t > 0$;

(b) $(\partial u/\partial t)(\cdot)$, $\Delta u(\cdot)$, $V_R u(\cdot)$, $|u|^{q-2}u(\cdot) \in L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^N))$ $(\forall T > 0)$;

(c) $u(\cdot)$ は $(0,\infty)$ 上 a.e. で $(\mathrm{CGL})_R$ を満たす.

また, V_R を0に置き換えて (a)–(c) を満たす関数 $u(\cdot) \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N))$ を (CGL) の**大域的強解**という．条件 (b) より, $u(\cdot)$ が $(\mathrm{CGL})_R$ または (CGL) の大域的強解ならば, $u(\cdot) \in H^1(0,T; L^2(\mathbb{R}^N)) \subset C^{0,1/2}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$ $(\forall T > 0)$ であることに注意する.

定理 1. $N \in \mathbb{N}$, $R \geq 0$ とし, $\lambda, \kappa, \alpha, \beta, \gamma, q$ は (1), (2) を満たすとする．そのとき任意の初期値 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap D(V_R^{1/2}) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ に対して $(\mathrm{CGL})_R$ の大域的強解 $u(\cdot) \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N))$ が存在する．さらに, 次が成立する:

$$u(\cdot) \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^N) \cap D(V_R^{1/2}) \cap L^q(\mathbb{R}^N)), \tag{4}$$

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq e^{\gamma t}\|u_0\|_{L^2}, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

$$E_R(u(t)) + \eta \int_0^t \big\{\delta^2 \|(-\Delta + V_R)u(s)\|_{L^2}^2 + \|u(s)\|_{L^{2(q-1)}}^{2(q-1)}\big\}\, ds \leq e^{\gamma_+ qt} E_R(u_0). \tag{6}$$

ここで $\gamma_+ := \max\{\gamma, 0\}$, $E_R(u) := (\delta^2/2)\big[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|V_R^{1/2}u\|_{L^2}^2\big] + (1/q)\|u\|_{L^q}^q$ で, $\delta > 0$ 及び $\eta > 0$ は $\lambda, \kappa, \alpha, \beta, q$ に依存する定数である.

定理 2. $N \in \mathbb{N}$ とし, $\lambda, \kappa, \alpha, \beta, \gamma, q$ は (1), (2) を満たすとする．そのとき任意の初期値 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ に対して (CGL) の大域的強解 $u(\cdot) \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N))$ が存在する．さらに, (5) と次が成立する:

$$u(\cdot) \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)), \tag{7}$$

$$E_\infty(u(t)) + \eta \int_0^t \big\{\delta^2 \|\Delta u(s)\|_{L^2}^2 + \|u(s)\|_{L^{2(q-1)}}^{2(q-1)}\big\}\, ds \leq e^{\gamma_+ qt} E_\infty(u_0), \quad t \geq 0. \tag{8}$$

ここで $E_\infty(u) := (\delta^2/2)\|\nabla u\|_{L^2}^2 + (1/q)\|u\|_{L^q}^q$ で, γ_+, δ, η は定理1における定数と同じものである.

参考文献

[1] J. Ginibre, G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation I, Compactness methods*, Physica D **95** (1996), 191–228.

[2] N. Okazawa, *An L^p theory for Schrödinger operators with nonnegative potentials*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 675–688.

[3] N. Okazawa, T. Yokota, *Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p-Laplacian*, J. Differential Equations **182** (2002), 541–576.