

半線型二階楕円型方程式の非線型項のパラメータに伴う解の挙動について

数学専攻 今村 悠

指導教員 宮島 静雄

本論文は、 D をあるなめらかな境界を持つ有界領域、 λ を実のパラメータとして、適当な境界条件の下での半線型偏微分方程式

$$Au = \lambda f(u) \text{ in } D \quad (1)$$

について、 f や λ の変化に対し解がどのように変わるかを調べるものである。ここに

$$Au(x) := - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right) + c(x)u(x) \quad (2)$$

はなめらかな係数を持つ一様楕円型微分作用素で、 $c(x) > 0$ ($\forall x \in D$) とする。このような形の方程式の研究は広く行われている。Taira [1], [2] は、非線型項が Arrhenius 則を表現する $f(t) = \exp(\frac{t}{1+\varepsilon t})$ であり、境界条件が Newton の冷却法則を表している場合について、 ε, λ の値の変化に伴う解の変化を調べ、興味ある結果を得ている。

本論文では、[1], [2] で得られた結果を、Arrhenius 則を表現する f より一般の関数 f の場合へ拡張した (定理 1 と定理 2)。また、正值解の多重存在について、[1], [2] における 3 個よりも多数個、一般に任意の奇数個存在するための条件を与えた (定理 3)。

本論文の結果の鍵となるのは関数 $\nu(t) := t/f(t)$ ($t \geq 0$) であり、この関数の性質によって解の状況が支配されることを示す。そのために、(1) と同じ境界条件の下で、 u に関する線型方程式 $Au = v$ を考えたときの一意解を Kv とし、 $\phi := K1$, $\|\phi\|_\infty := \max_{\overline{D}} \phi$ とおく。また B を $\text{dist}(\Omega, \partial D) > 0$ を満たすなめらかな境界を持つ D の部分領域 Ω の全体からなる集合とし、 $\beta := \sup_{\Omega \in B} C_\Omega$; $C_\Omega := \inf_{\Omega} (K\chi_\Omega)$ とおく。そして、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を一般の正值、単調増加な連続関数とする。これらの定義の下で、次のことが示される。

定理 1 ν が狭義単調増加かつ $\nu(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) であれば、任意の $\lambda > 0$ に対し (1) はただ一つの正の解を持つ。

定理 2 ν は極大値を与える点 t_1 と極小値を与える点 t_2 を持ち、両者の関係は $0 < t_1 < t_2$ で、 $\nu(t_1) > \nu(t_2)$ および $\nu(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) が成り立つとする。このとき次の (A), (B) が成立する：(A) λ が $\frac{\nu(t_2)}{\beta} < \lambda < \frac{\nu(t_1)}{\|\phi\|_\infty}$ を満たせば、(1) は少なくとも三つの正の解を持つ。(B) f が C^1 級で、かつ $\exists T > 0 \ \forall t > t_2 + T \ [\nu'(t) \geq \nu'(t_2 + T) > 0]$ とする。このとき、 λ が十分小あるいは十分大ならば、(1) はただ一つの正の解を持つ。

定理 3 ν は極大値を与える点 t_1, t_3 と極小値を与える点 t_2, t_4 を持ち、各々の関係は $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ で、 $\nu(t_1) > \nu(t_4)$, $\nu(t_3) > \nu(t_4)$ および $\nu(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) が成り立つとする。このとき、 λ が $\frac{\max\{\nu(t_2), \nu(t_4)\}}{\beta} < \lambda < \frac{\min\{\nu(t_1), \nu(t_3)\}}{\|\phi\|_\infty}$ を満たせば、(1) は少なくとも 5 個の正の解を持つ。

本論文では、これらの定理の条件を満たす具体例も提示する。また、Taira の結果は擬微分作用素や Besov 空間を用いて得られているが、本論文では Dirichlet 境界条件の場合にはより初等的に結果が得られることを示し、 λ に対する解のノルム評価も得ている。

参考文献

- [1] K.Taira, *Bifurcation Theory for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems*, Hiroshima Math.J. 28 (1998), no.2, 261-308.
- [2] —, *A Mathematical Analysis of Thermal Explosions*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 28 (2001), no. 10, 581-607