2連立 Schrödinger 方程式系に対する横方向不安定性

山崎 陽平 (京都大学大学院理学研究科)

1 導入

次の 2 連立 Schrödinger 方程式系:

$$
\text{(NLS)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u_1 = -\Delta u_1 - \kappa|u_1|u_1 - \gamma\bar{u}_1 u_2, \\ i\partial_t u_2 = -2\Delta u_2 - 2|u_2|u_2 - \gamma(u_2)^2, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times X, \\ \vec{u} = (u_1, u_2) : \mathbb{R}\times X \to C^2, \end{cases}
$$

について考える．ここで, $\gamma > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$, X は空間次元を表し, $X = \mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ ($\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$) を考える．$X = \mathbb{R}^N$ のとき, この方程式は Colin-Ohta [2] で研究されている方程式であり, プラズマでのラマン効果を記述する方程式を簡略化した方程式である．$X = R^N$ ($N = 1, 2, 3$), $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ のときは (NLS) は $L^2(X)$ と $H^1(X)$ で大域的適切性であることが知られている．本講演では定在波という変数分離型の解の不安定化現象について考察する．まず, 記号を準備する．方程式の対称性を表すゲージ変換 G を以下で定義する．

$$
G(\theta)\vec{u} = (e^{i\theta}u_1, e^{2i\theta}u_2)
$$

続いて, 定在波について定義する．定在波とは方程式の非線形性を特徴する解である．

Definition 1.1. (NLS) の非自明解 $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))$ が振動数 ω の定在波であるとは $\vec{u}(t,x) = G(\omega t)\vec{\varphi}(x)$ ($\vec{\varphi} \in (H^1(X))^2$) であるときに言う．このとき, 関数 $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ は次の楕円型方程式の非自明解になる．

$$
\text{(SNLS)} \qquad \begin{cases} -\Delta\varphi_1 + \omega\varphi_1 - \kappa|\varphi_1|\varphi_1 - \gamma\bar{\varphi}_1\varphi_2 = 0, \\ -\Delta\varphi_2 + \omega\varphi_2 - |\varphi_2|\varphi_2 - (\gamma/2)(\varphi_1)^2 = 0, \quad x \in X. \end{cases}
$$

次に定在波の安定性を定義する．定在波が安定であるとは定在波に微小な摂動を加え時間発展させたときに時間発展させた解が定在波の形を保つことを言い, そうでないとき不安定であるという．

Definition 1.2. 定在波 $G(\omega t)\vec{\varphi}$ が安定であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して初期値 $\vec{u}_0$ が $\|\vec{u}_0 - \vec{\varphi}\|_{H^1} < \delta$ を満たすとき $\vec{u}_0$ を初期値とする解 $\vec{u}(t)$ が $t \in [0,\infty)$ で存在して次を満たすことである．

$$
\inf_{\theta\in\mathbb{R}, x\in X} \|\vec{u}(t) - G(\theta)\vec{\varphi}(\cdot - x)\|_{H^1} < \varepsilon, \quad t > 0.
$$

安定でないとき定在波 $G(\omega t)\vec{\varphi}$ は不安定であるという．

2　先行結果

まず, Colin-Ohta による $\mathbb{R}^N$ 上の (NLS) の安定性の結果 [2] について紹介する. 初めに, 以下の 2 次の非線形項を持つ Schrödinger 方程式について考える.

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{2.1}$$

(2.1) には基底状態解と呼ばれる定在波 $e^{i\omega t}\psi_\omega$ が存在する. (2.1) の基底状態解の安定性は良く知られており, 以下の結果が存在する.

Theorem 2.1. 以下が成立する.

(i) もし $1 \le N \le 3$ ならば定在波 $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は安定である.

(ii) もし $4 \le N \le 5$ ならば定在波 $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は不安定である.

ここで, $N \ge 6$ のときは定在波を定義する楕円型微分方程式から導かれる自然な積分等式を満たす解は自明しかないことに注意する.

そこで, この良く知られた (2.1) の基底状態解を用いて (NLS) の定在波を

$$\Psi_{\alpha,\beta,\omega} = (\alpha\psi_\omega, \beta\psi_\omega)$$

という形で表すことを考える. このとき, Colin-Ohta[2] による以下の結果が存在する.

Theorem 2.2 (Colin-Ohta[2])**.** $X = \mathbb{R}^N$ $(1 \le N \le 2)$ とする. このとき, 以下の図 (Figure 1) のように領域 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ は $\mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3$ と分割され, 以下が成立する.

(i) もし $(\gamma, \kappa) \in \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ ならばある α_+, $\beta_- > 0$ が存在して $G(\omega t)\Psi_{\alpha_+,\beta_-,\omega}$ は (NLS) の安定な定在波である.

(ii) もし $(\gamma, \kappa) \in \mathcal{J}_2$ ならばある α_-, $\beta_+ > 0$ が存在して $G(\omega t)\Psi_{\alpha_+,\beta_-,\omega}$ は (NLS) の不安定な定在波である.

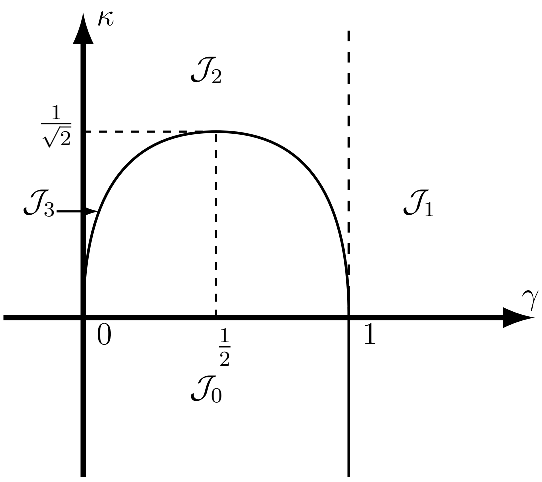

Figure 1: The sets $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ and $\mathcal{J}_3$.

次に Rousset-Tzvetkov による 3 次の非線形項を持つ Schrödinger 方程式の横方向不安定性の結果 [4, 5] について紹介する． 他の方程式についての横方向不安定性については Rousset-Tzvetkov [4, 5, 7] がある. 次の 3 次の非線形項を持つ Schrödinger 方程式;

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times X \tag{CNLS}$$

について考える. $X = \mathbb{R}$ のとき (CNLS) には基底状態解と呼ばれる定在波 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ が存在し, この定在波は $\mathbb{R}$ 上の (CNLS) において安定である. しかし, $\phi_\omega(x,y) = \phi_\omega(x)$ (ただし, $y \in \mathbb{R}$ or $\mathbb{T}_L$) とみなし、$e^{i\omega t}\phi_\omega(x,y)$ を $X = \mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上の定在波とみなすと不安定になることがある. このように $\mathbb{R}$ 上の安定な定在波をより高い次元の定在波とみなすと定在波が不安定になることを横方向不安定性という. (CNLS) の横方向不安定性については Rousset-Tzvetkov[4, 5] による以下の結果が存在する.

Theorem 2.3 (Rousset-Tzvetkov[4, 5])**.** 以下が成立する.

(i) もし $X = \mathbb{R}^2$ ならば定在波 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x,y)$ は不安定になる.

(ii) ある定数 $M_\omega > 0$ が存在して, もし $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ かつ $L > M_\omega$ ならば定在波 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x,y)$ は不安定になる.

この結果は空間が広くなると定在波が不安定化することを示している. また, この結果は (CNLS) の線形化方程式の不安定性から導かれている. しかし, $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上の線形化作用素によって生成される半群についてはスペクトル写像定理が成り立つかどうか知られていない. そのため, $y \in \mathbb{T}_L$ 方向の周波数が有限となる近似解を構成し, 低周波数に関する半群の評価を用いて不安定性を示している. ここで有限の周波数を持つ近似解の構成のため, 彼らの手法では非線形項が無限回 Fréchet 微分可能であること（非線形項 $|u|^2 u$ が $u\bar{u}u$ のように u と $\bar{u}$ の多項式で表せること）を利用する.

今回考える (NLS) 方程式は無限回 Fréchet 微分可能でない非線形項 $|u|u$ を含む. このような無限回 Fréchet 微分可能でない非線形項をもつ方程式において横方向不安定性を得たのが今回紹介する結果である.

3 主結果

$$L_\omega = \frac{2}{\sqrt{5\omega}}$$

とおく. ψ_ω を

$$-\partial_x^2 \psi + \omega\psi - |\psi|\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

の無限遠で減衰する正値対称解とする. $X = \mathbb{R}$ 上の安定であった定在波 $G(\omega t)\Psi_{\alpha_+,\beta_-,\omega}(x)$ を $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上の定在波 $G(\omega t)\Psi_{\alpha_+,\beta_-,\omega}(x,y)$ とみなす. このとき, 以下の結果を得た.

Theorem 3.1. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ とする.

(i) もし $0 < L < L_\omega$ ならば定在波 $G(\omega t)\Psi_{\alpha_+,\beta_-,\omega}(x,y)$ は安定である.

(ii) もし $L > L_\omega$ ならば定在波 $G(\omega t)\Psi_{\alpha_+,\beta_-,\omega}(x,y)$ は不安定である.

定理 3.1 の安定性に関する結果は Grillakis-Shatah-Strauss[3] や Colin-Colin-Ohta[1] により導かれる. また、不安定性に対応する線形不安定性は Rousset-Tzvetkov[6] を用いて示すことができる。しかし, 定理 3.1 の不安定性に関する結果では非線形項が無限回 Fréchet 微分可能でないため, 近似解を構成できず, Rousset-Tzvetkov の手法が適用できない. 今回は, 不安定化する解と定在波の解の差に関して考え, その差の低周波部分で差の高周波部分を評価することにより, 不安定性の結果を得た. 本講演では定理 3.1 の不安定性に関する結果について考察する.

参考文献

[1] M. Colin, T. Colin, M. Ohta, Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interaction, Funkcial. Ekvac. **52** (2009), 371-380.

[2] M. Colin, M. Ohta, Bifuracation from semi-trivial standing waves and ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations, arXiv:1102.1545v1.

[3] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, J. Funct. Anal. **74** (1987), 160-197.

[4] F. Rousset, N. Tzvetkov, Transverse nonlinear instability of solitary waves for some Hamiltonian PDE's, J. Math. Pures. Appl. **90** (2008) 550-590.

[5] F. Rousset, N. Tzvetkov, Transverse nonlinear instability for two-dimensional dispersive models, Ann. I. Poincaré-AN **26** (2009) 477-496.

[6] F. Rousset, N. Tzvetkov, A simple criterion of transverse linear instability for solitary waves, Math. Res. Lett. **17** (2010), no. 1, 157-169.

[7] F. Rousset, N. Tzvetkov, Stability and instability of the KdV solitary wave under the KP-I flow, arXiv:1104.2555v1.