Semiclassical parametrix and Strichartz estimates for Schrödinger equations on manifolds with ends

水谷 治哉 (学習院大学理学部数学科)

1 Introduction

完備リーマン多様体 (M, g) 上の Schrödinger 方程式の初期値問題を考える:

$$i\partial_t u = Hu \text{ on } \mathbb{R}\times M; \quad u|_{t=0} = u_0 \in L^2(M), \quad H = -\frac{1}{2}\Delta_g.$$

H は L^2 上自己共役なので, (Stone の定理によって) 唯一つの強連続 1 パラメータユニタリ群 (発展作用素) e^{-itH} を生成し, 解は $u(t) = e^{-itH}u_0 \in C(\mathbb{R}; L^2(M))$ で与えられる.

本講演では散乱多様体と呼ばれるユークリッド空間の極座標表示を一般化した end 構造を持つ非コンパクト多様体に対する e^{-itH} のパラメトリックス (近似作用素) の構成について考察する. また, 応用として得られる Strichartz 評価と呼ばれる平滑化作用についても, 時間が許せばお話ししたい.

1.1 ポテンシャルを伴った Schrödinger 方程式

まず, $\mathbb{R}^d$ 上の Schrödinger 方程式を例として発展作用素と古典力学との関係を述べる.

$$ih\partial_t u = H^h u; \quad u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad H^h = -\frac{h^2}{2}\Delta + V(x).$$

ここでポテンシャルに対しては $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, $|\partial_x^\alpha V(x)| \le C_\alpha$ $(|\alpha| \ge 2)$ を仮定する. 次の形の ansatz を考える (これを WKB 近似という):

$$u_N(t,x) = (2\pi h)^{-d/2}\int e^{i\varphi_t(x,\xi)/h}\sum_{j=0}^{N} h^j a_{t,j}(x,\xi)\hat{u}_0(\xi)d\xi. \quad (\hat{f} = \mathcal{F}f \text{ は Fourier 変換})$$

これを方程式に代入すると, 以下の Hamilton-Jacobi 方程式と輸送方程式が得られる:

$$\partial_t\varphi_t + \frac{1}{2}|\nabla_x\varphi_t|^2 + V(x) = 0; \quad \varphi^0(x,\xi) = x\cdot\xi.$$

$$\begin{cases}\partial_t a_{t,0} + \nabla_x\varphi_t\cdot\nabla_x a_{t,0} + \frac{1}{2}|\nabla_x\varphi_t|^2 a_{t,0} = 0; & a_{t,0}|_{t=0} = 1,\\ \partial_t a_{t,j} + \nabla_x\varphi_t\cdot\nabla_x a_{t,j} + \frac{1}{2}|\nabla_x\varphi_t|^2 a_{t,j} = -\frac{i}{2}\Delta a_{t,j-1}; & a_{t,j}|_{t=0} = 0,\ 1\le j\le N.\end{cases}$$

この二つの方程式は特性曲線の方法を用いて以下のような手順で解くことが出来る:

(1) 全エネルギー $p(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$ が生成する Hamilton 流 (X_t, Ξ_t) を考える:

$$\begin{cases}\dot{X}_t = \nabla_\xi p = \Xi_t;\ \dot{\Xi}_t = -\nabla_x p = -\nabla_x V(X_t)\\ (X_f t, \Xi_t)|_{t=0} = (x,\xi)\end{cases} \qquad \text{(Hamilton 方程式)}$$

特に, $\mathbb{R}^{2d} \ni (x,\xi) \mapsto (X_t,\xi)$ が微分同相であることを示す. 逆写像を $(x,\xi)\mapsto(Y_t,\xi)$ とおくと, 写像 $s \mapsto (X_s(Y_t(x,\xi),\xi), \Xi_s(Y_t(x,\xi),\xi))$ は $s=0$ における初期運動量が ξ, $s=t$ における位置が x であるような Hamilton 方程式の解になる.

(2) Lagrangian $L = \nabla_\xi p \cdot \xi - p = \frac{1}{2}|\xi|^2 - V(x)$ に対して, φ_t を以下の作用積分で定義すると Hamilton-Jacobi 方程式をみたすことが分かる:

$$\varphi_t(x,\xi) = x \cdot \xi + \int_0^t L(X_s(Y_t(x,\xi),\xi), \Xi_s(Y_t(x,\xi),\xi))ds.$$

(3) 輸送方程式はベクトル場 $\nabla_x \varphi_t$ に沿った流れに関する特性曲線の方法を用いて解ける. (ここでは省略する.)

実際に, 上記の V の仮定の下では t が十分小さければ相関数 φ_t と振幅 $a_{t,j}$ を構成することが出来る. また, $N \to \infty$ としたときの振幅の極限も存在して, それを a_t と書けば方程式の解は Fourier 積分作用素 (FIO) で表される (cf. [4, 7]):

$$u(t,x) = e^{-itH^h/h} u_0(x) = (2\pi h)^{-d/2} \int e^{i\varphi_t(x,\xi)} a_t(x,\xi) \hat{u}_0(\xi) d\xi, \quad |t| \ll 1.$$

ステップ (2) の Hamilton 流の微分同相性を示すことが重要で, そのためには $\nabla_x X_t \approx \mathrm{Id}$ となれば良い. $\dot{X}_t$ は $p(x,\xi)$ の ξ 微分なので, 結局以下が成り立てば, $|t| \ll 1$ のとき解は FIO で書けることが分かっている ([12]):

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta} \quad \text{for} \quad |\alpha+\beta| \ge 2 \quad (p\,\text{は高々}\,2\,\text{次型}) \tag{1.1}$$

以上, 大まかにいえば Schrödinger 作用素が与えられたとき, その主シンボルが生成する Hamilton 流 (即ち, Laplacian ならば測地流) の漸近挙動を調べることで, 解 $u(t,x)$ の性質を調べることが出来るというのが基本的な考え方である.

注. 多様体上の Laplacian は (1.1) を満たさないが, $\operatorname{supp} \hat{u}_0 \subset \{|\xi| \lesssim \lambda\}$ と仮定すると $|t| \ll \lambda^{-1}$ までは解を FIO で表すことができる. しかし, これだけでは Strichartz 評価の証明には不十分で, 初期値に対する余分な正則性が必要になってしまう.

1.2 散乱多様体

M を d 次元完備 C^∞ 多様体 ($d \ge 2$) として次の分解を仮定する:

$$M = M_c \cup M_\infty, \ M_c \Subset M, \ M_\infty \cong \mathbb{R}_+ \times S, \quad \mathbb{R}_+ := (0,\infty).$$

M_c は相対コンパクトな部分集合, S は $d-1$ 次元閉多様体とする. 以下では微分同相 $\iota : M_\infty \ni x \mapsto (r(x), \theta(x)) \in \mathbb{R}_+ \times S$ を一つ固定し, $M_\infty = \mathbb{R}_+ \times S$ と同一視して考え, M_∞ 上の座標系として $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times S$ を用いる. また, $r(x)$ は $r \equiv 1$ on M_c をみたすように M 全体に拡張しておく.

g を M 上のリーマン計量とする. $r \ge 1$ に滑らかに依存する S 上のリーマン計量 $g_S(r)$ が存在して, $[1,\infty) \times S$ 上で g は以下のように書けると仮定する:

$$g = dr^2 + r^{2\sigma} g_S(r) = dr^2 + r^{2\sigma} \sum_{j,k=1}^{d-1} g_{S,jk}(r,\theta) d\theta^j d\theta^k. \tag{1.2}$$

以下では Einstein の総和規約を用いて, $\sum_{j,k=1}^{d-1}$ は書かないことにする. σ は体積要素の増大度を表すパラメータであり, 特に $\sigma = 1$ の場合, g は散乱計量, (M,g) は散乱多様体と呼ばれる. $\sigma = 1$, $S = \mathbb{S}^{d-1}$ とした場合がユークリッド空間の極座標表示に対応している.

$k_S(r,\theta,\omega)$ を $g_S(r)$ に付随した運動エネルギー, すなわち $-\frac{1}{2}\Delta_{g_S(r)}$ の主シンボルとする:

$$k_S(r,\theta,\omega) = \frac{1}{2} g_S^{jk}(r,\theta)\omega_j\omega_k \in C^\infty((1,\infty) \times T^*S; \mathbb{R}), \quad (g_S^{jk})_{j,k} = (g_{S,jk})_{j,k}^{-1}.$$

仮定 A. (i) g_S^{jk} は r によらず一様楕円型で, 任意の $(\ell,\alpha)\in\mathbb{Z}_+^d:=\mathbb{N}^d\cup\{0\}$ に対して

$$|\partial_r^\ell\partial_\theta^\alpha g_S^{jk}(r,\theta|\le C_{\ell\alpha}r^{-\ell}\quad\text{on}\quad[1,\infty)\times T^*S.$$

(ii) (凸性条件) ある $R,\varepsilon>0$ が存在して

$$2\sigma k_S-r\nabla_r k_S\ge\varepsilon k_S\quad\text{on}\quad[R,\infty)\times T^*S.$$

注. S 上の r に依存しない一様楕円型 (逆) 計量 $h_S^{jk}(\theta)$ と定数 $\delta_0<1$, $\delta_1<2\sigma(1-\delta_0)$ が存在して, $m^{jk}:=g_S^{jk}-h_S^{jk}$ が次をみたすとする: $m^{jk}\ge-\delta_0h_S^{jk}$, $r\nabla_r m^{jk}\le\delta_1 h_S^{jk}$. このとき $\varepsilon=2\sigma(1-\delta_0)-\delta_1$ ととれば, g_S^{jk} は仮定 A (ii) をみたす. 特に, $\partial_r^\ell\partial_\theta^\alpha m^{jk}=O(\langle r\rangle^{-l})$, $\sup_{l+|\alpha|\le1}\langle r\rangle^\ell|\partial_r^\ell\partial_\theta^\alpha m^{jk}|\ll1$ ならば 仮定 A が成り立つ. 例えば $m^{jk}=\nu\sin(\log\langle r\rangle)\delta_{jk}$, $0<\nu\ll1$, など.

注. 凸性条件から次の Mourre 型不等式が得られる:

$$\{K,\{K,r^2\}\}\ge\varepsilon K\quad\text{on}\quad[R,\infty)\times T^*S.$$

ここで K は g に付随した運動エネルギー ($-\frac{1}{2}\Delta_g$ の主シンボル), $\{\cdot,\cdot\}$ は Poisson 括弧である. 量子力学系に対する Mourre の不等式は波動作用素が存在するための十分条件の一つなので, 大まかにいって凸性条件のもとで古典力学的粒子は散乱すると期待できる.

さらに, より強い仮定として以下の長距離型条件も考える:

仮定 B (長距離型条件)**.** $m^{jk}=g_S^{jk}-h_S^{jk}$ に対して, ある $\mu>0$ が存在して,

$$\partial_r^\ell\partial_\theta^\alpha m^{jk}(r,\theta)=O(r^{-\mu-\ell}),\quad r\to+\infty$$

以上の準備をもとに, 以降の節では常に以下を仮定する:

- g_S は仮定 A をみたす.
- 「$\sigma>1$」 or 「$\sigma=1$ かつ $\mu+\sigma>1$ をみたす $\mu>0$ に対して仮定 B をみたす」

2 M_∞ 上の Hamilton 流

g に付随した運動エネルギーを $K\in C^\infty(T^*M;\mathbb{R})$ とすると

$$K(r,\theta,\rho,\omega)=\frac{1}{2}\rho^2+r^{-2\sigma}k_s(r,\theta,\omega),\quad(r,\theta,\rho,\omega)\in T^*([1,\infty)\times S)\cong[1,\infty)\times S\times\mathbb{R}^{2d}.$$

次の Hamilton 方程式の解 (K が生成する Hamilton 流) を $\Phi_t=(r_t,\theta_t,\rho_t,\omega_t)$ とおく:

$$\begin{aligned}\dot r_t&=\nabla_\rho K(\Phi_t)=\rho_t, & \dot\rho_t&=-\nabla_r K(\Phi_t)=r_t^{-2\sigma-1}(2\sigma k_S-r\nabla_r k_S),\\ \dot\theta_t&=\nabla_\omega K(\Phi_t)=r_t^{-2\sigma}\nabla_\omega k_S, & \dot\omega_t&=-\nabla_\theta K(\Phi_t)=-r_t^{-2\sigma}\nabla_\theta k_S,\end{aligned}$$

初期値および初期エネルギーを $\Phi_0=(r,\theta,\rho,\omega)$, $E_0:=K(\Phi_0)$ とおく.

この節では Φ_t の "初期エネルギー E_0 に依存しない時間区間" での有限時間挙動を調べる. まず, Φ_t は次の斉次性とエネルギー保存則を持つ:

$$(r_t,\theta_t,\rho_t,\omega_t)(r,\theta,\rho,\omega)=(r_{\lambda t},\theta_{\lambda t},\lambda\rho_{\lambda t},\lambda\omega_{\lambda t})(r,\theta,\rho/\lambda,\omega/\lambda),\ \lambda>0;\quad K(\Phi_t)=K(\Phi_0).$$

また, エネルギー保存則と k_S の楕円性から次が直ちに分かる:

$$|\rho_t|\le\sqrt{2E_0},\quad|\omega_t|^2\lesssim k_S(\Phi_t)\le r_t^{2\sigma}E_0\quad\text{for}\quad\Phi_0\in T^*((R,\infty)\times U)\cap K^{-1}(I),\ U\Subset S.$$

従って $\lambda=\sqrt{2E_0}$ ととれば次のように $E_0\approx1$ の場合に帰着できる:

エネルギー $= E_0$ の $|t| \lesssim 1$ までの挙動 $\Leftrightarrow$ エネルギー ≈ 1 の $|t| \lesssim \sqrt{E_0}$ までの挙動.

$I \Subset (0,\infty)$ を有界区間 (例えば, $I = (1/4, 4)$ とすればよい) に対して, 外向き $(+)$・内向き $(-)$ 領域を次で定義する:

$$\Gamma^{\pm}(R,\delta) := \{r,\theta,\rho,\omega); r > R,\ \theta \in U,\ E_0 \in I,\ \pm\rho > -\delta\sqrt{2E_0}\},\ \delta \in (-1,1).$$

$\delta > 0$ ならば $T^*((R,\infty)\times S) \cap K^{-1}(I) \subset \Gamma^+(R,\delta) \cup \Gamma^-(R,\delta)$ である. 以下では外向き領域で $t \geq 0$ の場合だけ考えることにする.

補題 2.1. $-1 < \delta \ll \varepsilon,\ R \gg 1$ とすると, $\Phi_0 = (r,\theta,\rho,\omega) \in \Gamma^+(R,\delta),\ t \geq 0$ に対して,

$$r_t \approx r + t, \quad k_S(\Phi_t) \lesssim k_S(\Phi_0)\ (\leq r^{2\sigma}E_0).$$

注. $\sigma \in (1/2, 1]$ で仮定 B を仮定しない場合は $k_S(\Phi_t)$ は t について有界とは限らない.

補題 2.1 より外向き領域は $t \to +\infty$ のとき非捕捉的かつ Hamilton 流の作用に関して不変であることがわかる. つまり, ある $\widetilde{R} \geq 1$ と $-1 < \widetilde{\delta} \ll \varepsilon$ が存在して,

$$\Phi_t(\Gamma^+(R,\delta)) \subset \Gamma^+(\widetilde{R},\widetilde{\delta}) \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

さらに補題 2.1 を Hamilton 方程式に代入すると, より詳しい挙動が得られる:

補題 2.2. $-1 < \delta \ll \varepsilon,\ R \gg 1,\ (t,\Phi_0) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma^+(R,\delta)$ に対して, 以下が成り立つ:
(i) 時間局所挙動:

$$|\nabla_r r_t - 1| \lesssim r^{-1}|t|, \quad |\nabla_\theta \theta_t - 1| \lesssim r^{-\sigma}|t|,$$
$$|\nabla_\rho \rho_t - 1| \lesssim r^{-1}|t|, \quad |\nabla_\omega \omega_t - 1| \lesssim r^{-\sigma}|t|.$$

(ii) 長時間挙動:

$$|\nabla_r r_t - 1| \lesssim r^{-1}r^{-2\sigma}k_S(\Phi_0)|t|, \quad |\nabla_\theta \theta_t - 1| \lesssim r^{1-\sigma}\sqrt{r^{-2\sigma}k_S(\Phi_0)},$$
$$|\nabla_\rho \rho_t - 1| \lesssim r^{-2\sigma}k_S(\Phi_0), \quad |\nabla_\omega \omega_t - 1| \lesssim r^{1-\sigma}\sqrt{r^{-2\sigma}k_S(\Phi_0)}.$$

(iii) 漸近挙動:

$$\rho_t \geq \rho + Cr^{-2\sigma}k_S(\Phi_0)\left[1 - \left(\frac{r}{r+t}\right)^{2\sigma}\right], \quad 0 \leq E_0 - \frac{1}{2}\rho_t^2 \lesssim r^{-2\sigma}k_S(\Phi_0)\left(\frac{r}{r+t}\right)^{2\sigma}.$$

さらに, 次の極限が存在する:

$$\lim_{t\to+\infty}\rho_t = \sqrt{2E_0},\ \lim_{t\to+\infty} r_t^{-2\sigma}k_S(\Phi_t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty}(r_t - t\rho_t, \theta_t, \omega_t) = \exists(z_\infty, \theta_\infty, \omega_\infty).$$

(iv) エネルギーの遷移: $R_1 < R_2,\ -1 < \delta_1 < \delta_2 \ll \varepsilon$ に対して, 外向き中間領域および局所化した外向き中間領域を以下で定義する:

$$\Gamma^+_{int}(R,\delta_1,\delta_2) := \{R < r,\ \theta \in S,\ E_0 \in I,\ -\delta_2\sqrt{2E_0} < \rho < -\delta_1\sqrt{2E_0}\},$$
$$\Omega^+_{int}(R,\delta_1,\delta_2) := \{R < r < 2R\} \cap \Gamma^+(R_1,\delta_1,\delta_2)\ (\ \Subset \Gamma^+_{int}(R_1,\delta_1,\delta_2)\ ).$$

このとき, 任意の $\varepsilon_0 > 0$ に対して $\delta_2 - \delta_1$ を十分小さく取れば, $R_2 > R_1 \gg 1$ に対して

$$\Gamma^+_{int}(R_1,\delta_1,\delta_2) \cap \Phi_t(\Omega^+_{int}(R_2,\delta_1,\delta_2)) = \emptyset \quad \textit{for} \quad t \geq \varepsilon_0 R_2.$$

$\sigma_{\min} := \min(\sigma, 1)$ とする. 補題 2.2 の結果をまとめると:

(a) $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0$ に対して $|t| \ll \varepsilon r^{\sigma_{\min}}$ までは $\nabla\Phi_t \approx \mathrm{Id}$ が成り立つ.
$\Rightarrow$ 対応する量子力学的時間発展は FIO で表されるはず.

(b) $\Rightarrow$ 与えられた ε_0 に対して, $\delta_2 - \delta_1$ を十分小さくする (外向き領域を細かく分割する) ことで, $t \geq \varepsilon_0 r$ のとき Hamilton 流が初期領域から離れていくようにできる.
$\Rightarrow$ 対応する量子力学的時間発展は smoothing operator になっているはず.

(c) $\Rightarrow$ $|t| \gg r$ 以降は, $r^{-2\sigma}k_S(\Phi_t) \ll 1$ なので Hamilton 流は 1 次元の等速直線運動 $(z_\infty + \sqrt{2E_0}t, \theta_\infty, \sqrt{2E_0}, \omega_\infty)$ とほとんど同じように散乱する.
$\Rightarrow$ 散乱理論の手法が使えると期待できる.

注. $\sigma < 1/2$ の場合は (a) と (b) でギャップがある: $r^{\sigma_{\min}} \lesssim |t| \lesssim r$ では $\nabla\Phi_t \not\approx \mathrm{Id}$ かつ (b) のようなサポートの遷移も期待できない. これが $\sigma \geq 1$ と仮定している理由の一つである.

3　M_∞ 上の外向きパラメトリックス

$L^p(M) := L^p(M; \sqrt{\det g}dx)$ として, M 上の Schrödinger 方程式の初期値問題を考える:

$$i\partial_t u(t,x) = Hu(t,x) \text{ on } \mathbb{R} \times M; \quad u|_{t=0} = u_0 \in L^2(M), \quad H = -\frac{1}{2}\Delta_g.$$

まず解を以下のようにしてシリンダーに埋め込む. $v = r^{\sigma(d-1)/2}e^{-itH}u_0$ とおくと v は次の方程式をみたす:

$$i\partial_t v(t,x) = \widehat{H}v(t,x) \text{ on } \mathbb{R} \times M; \quad v|_{t=0} = v_0 := r^{\sigma(d-1)/2}u_0 \in \widehat{L}^2(M).$$

ここで, $\widehat{H} := r^{\sigma(d-1)/2}Hr^{-\sigma(d-1)/2}$, $\widehat{L}^2(M) := L^2(M, r^{-\sigma(d-1)}\sqrt{\det g}dx)$. $\widehat{H}$ は写像 $L^2(M) \ni u \mapsto r^{-\sigma(d-1)/2}u \in \widehat{L}^2(M)$ によって H とユニタリ同値なので, $\widehat{H}$ は $\widehat{L}^2(M)$ 上自己共役になる. さらに $\widehat{L}^2(M)$ は局所的に $L^2(\mathbb{R}^d, drd\theta)$ と同型, 即ち以下が成り立つ:

$$||f||_{\widehat{L}^2(M)} \approx ||f||_{L^2(\mathbb{R}^d, drd\theta)} \quad \text{if} \quad \operatorname{supp} f \subset [1,\infty) \times U,\ U \Subset S$$

特に $\mathbb{R}^d$ 上の擬微分作用素の結果が使える. そこで, e^{-itH} の代わりに $e^{-it\widehat{H}}$ の M_∞ 上の超局所的なパラメトリックスを 2 節の結果を用いて構成する.

$T^*([1,\infty) \times S)$ 上の関数 $a(r,\theta,\rho,\omega)$ に対してシンボルクラス S_{sc} と半古典擬微分作用素 (h-PDO) を以下で定義する:

$$a \in S_{\mathrm{sc}} := S(1, dr^2/\langle r\rangle^2 + d\theta^2 + d\rho^2 + d\omega^2/\langle r\rangle^{2\sigma}) \Leftrightarrow |\partial_r^j\partial_\theta^\alpha\partial_\rho^k\partial_\omega^\beta a| \leq C_{j\alpha k\beta}\langle r\rangle^{-j-\sigma|\beta|},$$
$$\mathrm{Op}_h(a)f(r,\theta) = (2\pi h)^{-d}\int e^{i(r-r')\rho + (\theta-\theta')\cdot\omega)/h}a(r,\theta,\rho,\omega)f(r',\theta')dr'd\theta'd\rho d\omega.$$

定理 3.1 ($|t| \ll r$ での WKB 近似)**.** *$R \gg 1$, $-1 < \delta \ll \varepsilon$ とする. このとき, ある ε_0 が存在して, 任意の $a^+ \in S_{\mathrm{sc}}$, $\operatorname{supp} a^+ \subset \Gamma^+(R,\delta)$, に対して*

$$e^{-ith\widehat{H}}\,\mathrm{Op}_h(a^+) = J(\Psi_t^+, b_t^+) + O_{\widehat{L}^2(M)}(h^\infty), \quad |t| \leq \varepsilon_0 R.$$

ここで, $J(\Psi_t^+, b_t^+)$ は相関数が Ψ_t^+, 振幅が b_t^+ の h-FIO で次の積分核をもつ:

$$J(\Psi_t^+, b_t^+)(r,\theta,r',\theta') = (2\pi h)^{-d}\int e^{i(\Psi^+(t,r,\theta,\rho,\omega) - r'\rho - \theta'\cdot\omega)/h}b_t^+(r,\theta,\rho,\omega)d\rho d\omega,$$
$$\Psi_t^+(r\,\theta,\rho,\omega) = r\rho + \theta\cdot\omega - tK(r,\theta,\rho,\omega) + O(\varepsilon_0|t|),\ b_t \in L_t^\infty([-\varepsilon_0 R, \varepsilon_0 R]; S_{\mathrm{sc}}).$$

定理 3.2 (中間領域上の平滑化作用). $R_2 > R_1 \gg 1$ とする．命題 3.1 の ε_0 に対して，$-1 < \delta_1 < \delta_2 \ll \varepsilon$ を $\delta_2 - \delta_1$ が十分小さくなるようにとる．このとき, 任意の $a^+_{int}, b^+_{int} \in S_{\mathrm{sc}}$, $\operatorname{supp} a^+_{int} \subset \Gamma^+_{int}(R_1, \delta_1, \delta_2)$, $\operatorname{supp} b^+_{int} \subset \Omega^+_{int}(R_2, \delta_1, \delta_2)$ に対して，

$$\mathrm{Op}_h(a^+_{int}) e^{-ith\widehat{H}} \mathrm{Op}_h(b^+_{int}) = O_{\widehat{L}^2(M)}(h^\infty), \quad \varepsilon_0 R_2 \le t \le h^{-1}.$$

定理 3.3 (狭義外向き領域上の磯崎-北田近似). $R \gg 1$, $\operatorname{diam} U \ll 1$, $-1 < \delta \ll \varepsilon$ とする．任意の $a^+_{stg} \in S_{\mathrm{sc}}$, $\operatorname{supp} a^+_{stg} \subset \Gamma^+_{stg}(R) := \Gamma^+(R, \delta) \cap \{r^{-2\sigma} k_S \ll 1\}$, に対して

$$e^{-ith\widehat{H}} \mathrm{Op}_h(a^+_{stg}) = J(S^+, c^+) e^{-ithD_r^2/2} J(S^+, d^+)^* + O_{\widehat{L}^2(M)}(h^\infty), \quad 0 \le t \le h^{-1}.$$

ここで，$J(S^+, c^+)$ は h-FIO で相関数 S^+, 振幅 $c^+, d^+ \in S_{\mathrm{sc}}$ は時間に依らない．また，

$$S^+(r, \theta, \rho, \omega) = r\rho + \theta \cdot \omega + O(r^{1-2\sigma} k_S), \quad \det \nabla_{\rho,\omega} \otimes \nabla_{r,\theta} S^+ \approx 1.$$

さらに，$O_{\widehat{L}^2(M)}(h^\infty)$ の誤差を除いて，$J(S^+, c^+) e^{-ithD_r^2/2} J(S^+, d^+)^*$ は次の積分核をもつ:

$$K^+_t(r, \theta, r', \theta') = (2\pi h)^{-d} \int e^{i[(r-r')\rho + (\theta-\theta')\cdot\omega - t\xi_+^2]/h} A^+_t(r, \theta, r', \theta', \rho, \omega) d\rho d\omega.$$

ここで，$A^+_t \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{1+3d})$．また相関数 ξ_+ は次をみたす:

$$\xi_+^2 = \xi_+(r, \theta, r', \theta', \rho, \omega)^2 = \frac{1}{2}\rho^2 + \sum_{j,k=1}^{d-1} q_+^{jk}(r, \theta, r')\omega_j\omega_k + O(r^{-3\sigma} k_S^{3/2} + \operatorname{diam} U \cdot r^{-2\sigma} k_S),$$
$$q_+(r, \theta, r') \gtrsim \varepsilon r^{-1} r'^{-2\sigma+1}.$$

特に $\omega = r^{1/2}(r')^{\sigma-1/2}\eta$ と変数変換すれば

$$|\det \mathrm{Hess}_{\rho,\eta}\, \xi_+(r, \theta, r', \theta', \rho, r^{1/2}(r')^{\sigma-1/2}\eta)^2| \gtrsim \varepsilon^{d-1} - C(\operatorname{diam} U + r^{-\sigma} k_S^{1/2}) \gtrsim \varepsilon^d.$$

注. (i) 狭義外向き領域上で古典軌道は等速直線運動に漸近したが, 量子力学の場合は単純な 1 次元発展作用素 $e^{-ithD_r^2/2}$ だけでなく，S 上の Hamilton 流の影響が現れることが $J(S^+, c^+) e^{-ithD_r^2/2} J(S^+, d^+)^*$ の相関数の $r^{-2\sigma} k_S \to 0$ での漸近挙動から分かる．

(ii) 区間 $(-1, \delta)$ の分割 $-1 < \delta_0 < \delta_1 < \cdots < \delta_N < \delta$ と任意の $a^+ \in S_{\mathrm{sc}}$, $\operatorname{supp} a^+ \subset \Gamma^+(R, \delta)$, に対して,

$$\exists\, a^+_{stg}, a^{+,1}_{int}, ..., a^{+,N}_{int} \in S_{\mathrm{sc}},\ \operatorname{supp} a^+_{stg} \subset \Gamma^+(R, \delta_0),\ \operatorname{supp} a^{+,j}_{int} \subset \Gamma^+_{int}(R, \delta_{j-1}, \delta_j)$$

s.t. $a^+ = a^+_{stg} + \sum_j a^{+,j}_{int}$. 特に, $|\delta_0 + 1| \ll 1$ とすれば $\Gamma^+(R, \delta_0) \subset \Gamma^+_{stg}(R)$ とできる．

上記の定理で得られたパラメトリックスに停留位相法を適用することで, 以下の超局所的分散型評価得られる．

定理 3.4 (超局所的分散型評価). $a^+_{stg}, a^+_{int} \in S_{\mathrm{sc}}$, $\operatorname{supp} a^+_{stg} \subset \Gamma^+(R, \delta_0)$, $\operatorname{supp} a^+_{int} \subset \Gamma^+_{int}(R, \delta_1, \delta_2)$ とすると, $h \in (0, 1]$ と $0 < |t| < 1$ に対して一様に次が成り立つ:

$$||\langle r\rangle^{-\sigma(d-1)/2} \mathrm{Op}_h(a^+_{stg}) e^{-it\widehat{H}} \mathrm{Op}_h(a^+_{stg})^* \langle r\rangle^{\sigma(d-1)/2} f||_{L^\infty(M)} \lesssim |t|^{-d/2} ||f||_{L^1(M)},$$
$$||\langle r\rangle^{-\sigma(d-1)/2} \mathrm{Op}_h(a^+_{int}) e^{-it\widehat{H}} \mathrm{Op}_h(a^+_{int})^* \langle r\rangle^{\sigma(d-1)/2} f||_{L^\infty(M)} \lesssim |t|^{-d/2} ||f||_{L^1(M)}.$$

4 Strichartz 評価

最後に, 応用として時間局所 Strichartz 評価に関する定理を述べる. 次を満たす (p,q) を admissible pair と呼ぶ: $p,q \ge 2,\ 2/p = d(1/2-1/q),\ (d,p,q) \neq (2,2,\infty)$.

定理 4.1. (i) g_S は 1.2 節最後の条件をみたすとする. このとき, あるコンパクト集合 $O \Subset M$ と $\chi \in C_0^\infty(M)$ *with* $\chi \equiv 1$ *on* O が存在して, 任意の $T>0$ と admissible pair (p,q) に対して,

$$||(1-\chi)e^{-itH}u_0||_{L^p([-T,T];L^q(M))} \le C_T||u_0||_{L^2(M)}.$$

(ii) さらに g が非捕捉的 (g の生成する Hamilton 流が時刻 $t \to \pm\infty$ で遠方に逃げていく) と仮定すれば, $\chi \equiv 0$ とした全空間での時間局所 Strichartz 評価も成り立つ.

Strichartz 評価は定量的な平滑化作用の一つであり, 滑らかでない電場ポテンシャルを伴った線形 Schrödinger 方程式や非線形 Schrödinger 方程式の適切性の解析に非常に役に立つことが知られている. ユークリッド空間上の変数係数 Schrödinger 方程式に対しては, 非捕捉性と漸近的平坦性の仮定の下で時間大域的に成り立つ事が分かっている ([3, 6]). end 構造を持った非コンパクト多様体上の場合には, 例えば散乱多様体 ($\sigma = 1$ としたもの) に関しては [5, 8] によって, 漸近的双曲型多様体 ($r^{2\sigma}$ を e^{2r} に取り替えたもの) に対しては [1] によって時間局所的評価が証明されている. しかし, これらの結果は全て仮定 B あるいは似たような収束条件を計量に仮定している. 漸近的に収束しない場合の最良な Strichartz 評価の例としては, 本研究が初めてであると思われる. ポテンシャルを伴う場合の結果は [13, 2, 9, 10, 11] などがある.

References

[1] Bouclet, J.-M.: Anal. PDE. **4** (2011), 1–84.

[2] Burq. N, Planchon, F., Stalker, J., Tahvildar-Zadeh, S.: Indiana Univ. Math. J. **53** (2004) 1665–1680.

[3] Bouclet, J.-M., Tzvetkov, N.: J. Funct. Analysis. **254** (2008), 1661–1682.

[4] Fujiwara, D.: Duke Math. J. **47** (1980), 559–600.

[5] Hassell, A., Tao, T., Wunsch, J.: Amer. J. Math. **128** (2006), 963–1024.

[6] Marzuola, J., Metcalfe, J., Tataru, D.: J. Funct. Analysis. **255** (2008), 1497–1553.

[7] Kitada, H., Kumano-go, H.: Osaka J. Math. **18** (1981), 291–360.

[8] Mizutani, H.: Comm. Partial Differential Equations. **37** (2012), 169–224.

[9] Mizutani, H.: To appear in J. Math. Soc. Japan (http://arxiv.org/abs/1108.2103)

[10] Mizutani, H.: To appear in Analysis and PDE (http://arxiv.org/abs/1202.5201)

[11] Mizutani, H.: Preprint (http://arxiv.org/abs/1212.1982)

[12] Robert, D.: *Progr. Math.* ***68*** *Birkhäuser, Basel*, 1987

[13] Yajima, K.: J. d'Anal. Math. **56** (1991), 29–76.