

3 次元半空間における弾性波のグリーン関数について

門脇 光輝 (愛媛大学大学院理工学研究科 (工学系))

1. はじめに

本講演では、地震波などを記述するノイマン型境界条件を持つ 3 次元半空間における等方弾性波のグリーン関数について報告する¹。研究の目標²はグリーン関数の空間遠方での漸近挙動を特定の方向を除外することなく決定することであるが、現時点では目標には到達していない。そこで本講演では、グリーン関数の解析に関連して現れる半球面上のある積分に対する評価を主結果 (定理 2) として述べる。以下であらためて触れるが、松村 [12] の道筋に従えば、この結果を基にグリーン関数の空間遠方での漸近挙動の決定される (予想される漸近挙動については講演中に述べる)。

一般的にグリーン関数の空間遠方での漸近挙動の決定がなされれば、レゾルベントの空間遠方の漸近挙動も得ることできる。そして領域内の散乱体 (今の場合、空洞や異物) に対する散乱振幅をレゾルベントの漸近挙動から導出できる (散乱体の条件にもよるが)。グリーン関数の漸近挙動を用いた散乱理論は、物理学・工学そしてそのための数値計算に関する書籍等でもよく目にする方法である。それ故、この数学的定式化は、物理学・工学そして数値計算の数学的お膳立てにもなりうる。

量子力学におけるシュレディンガー散乱や音響波による物体散乱に対しては、既にこの数学的定式化が行われている (シュレディンガー散乱は Newton [14], 物体散乱は Colton-Kress [2] など)。研究が進んだ大きな要因は、そのグリーン関数が具体的な関数 (特殊関数) で記述できることにある。特に、その漸近挙動は特殊関数のそれから導かれる。同様に 3 次元半空間でのディリクレまたはノイマン条件付き音響波 (一般次元の半空間でも OK) や 2 次元および 3 次元全領域における等方弾性波に対するグリーン関数も具体的に記述できる (例えば今村 [5], 小林 [11] を見よ)。また、マクセル方程式を含む一般の一階双曲系の生成作用素に対するグリーン関数の漸近挙動も研究されている ([12], Matsumura [13], Kikuchi [10] など)。ただし、この場合は一般的な系を扱うゆえに、そのグリーン関数の特殊関数による記述は期待できない。そのため [12], [13], [10] では球面上のある積分に定常位相の方法を用いた議論 (ここでの定理 2 に該当する結果) を経由して漸近挙動を導いている。

ノイマン型境界条件を持つ 3 次元半空間における等方弾性波の一般化された固有関数系は、レイリー波と呼ばれる境界の表面を主に伝播する 2 次元波に加えて、境界への入射波とその反射波、具体的には P モード：入射 P 波 (縦波) + 反射 P 波 + 反射 S 波 (横波)、SV モード：入射 S 波 + 反射 S 波 + 反射 P 波、SH モード：入射 S 波 + 反射 S 波から構成される (波面の法線ベクトルと変位方向が、平行な波が縦波、垂直な波が横波)。このことからこの伝播に対するグリーン関数を特殊関数によって簡潔に記述することは難しいと思われる。それ故に、目標達成のために [12], [13], [10] と同様な道筋を選択する。研究を進める上で留意しなければならないことは、固有関数が持つ 3 種類・3 方向の特異性である。具体的には、P モードの反射 S 波と SV モードの反射 P 波に関する固有関数がある方向 (臨界角) において持つ特異性 (屈折波的反射波であることを反映したもの)、SV モードおよび SH モードの入射 S 波と反射 S 波に関する固有関数が持つ北極方向における特異性 (半空間での横波の特異性を反映したもの)、そして P モード、SV モードを構成するすべての固有関数が持つ赤道方向における特異性 (伝播の舞台が半空間であることを反映したもの) である。

¹磯崎洋氏 (筑波大) と渡辺道之氏 (新潟大) との共同研究に基づく

²科学研究費基盤 (C) (課題番号 25400173) による支援を受けている

ノイマン型境界条件を持つ 3 次元半空間における等方弾性波に対する散乱理論に関する結果は、以下でも述べる Dermenjian-Guillot[3] による一般化された固有関数展開とそれを用いた極限吸収の原理の証明がある。そして、この一般化された固有関数展開を参考にして、M.Kawashita-W.Kawashita-Soga による [7], [8] および M. Kawashita-Soga[9] は物体散乱の組み立てで散乱作用素に関する結果までを示している。また、講演者による [6] は、この一般化された固有関数展開を用いて摩擦 (エネルギー吸収) 効果を持つ散乱体に対する散乱問題を扱っている (散乱解の存在証明)。しかし、いずれもグリーン関数またはレゾルベントの漸近挙動を用いた組み立てではないことを注意しておく。

2. 一般化された固有関数展開について

まず、ノイマン型境界条件を持つ 3 次元半空間における等方弾性波を記述する波動方程式の生成作用素を述べよう。そして [3] による一般化された固有関数展開 (補題 1) を述べることにする。

$x = (x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^3$ とする。そして $\mathbf{u}(x) = {}^t(u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ を $\mathbb{R}_+^3$ から $\mathbb{C}^3$ への関数とする。また、 $\rho_0 > 0, \mu_0 > 0, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ を定数として、 $3\lambda_0 + 2\mu_0 > 0$ を満たすものとする。このとき、 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+^3, \mathbb{C}^3, \rho_0 dx)$ における作用素 L_0 を次で定義する：

$$\begin{aligned} L_0 \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \{ (\lambda_0 + \mu_0) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu_0 \Delta \mathbf{u} \}, \\ D(L_0) &= \{ \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}_+^3, \mathbb{C}^3); \rho_0^{-1} \{ (\lambda_0 + \mu_0) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu_0 \Delta \mathbf{u} \} \in \mathcal{H}, \\ &\quad \lambda_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{j3} + \mu_0 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) \Big|_{x_3=0} = 0 \text{ in the trace sense, } (j = 1, 2, 3) \}. \end{aligned}$$

ただし、 $\nabla = {}^t(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ である。

このとき、 L_0 は自己共役作用素となる。次に L_0 に対する一般化された固有関数を以下に述べる。 $k = (k_1, k_2, k_3) = (\bar{k}, k_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^3$ と $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$k = |k|\omega = |k|(\tilde{\omega}, \omega_3) = |k|(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad p = |p|\nu = |p|(\nu_1, \nu_2)$$

とする。これらを用いて次の記号を準備する：

$$\begin{aligned} c_P^2 &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}, \quad c_S^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}, \\ \xi_{jl}(k) &= \left(\frac{c_j^2}{c_l^2} |k|^2 - |\bar{k}|^2 \right)^{1/2}, \quad \gamma_{jl}(\tilde{\omega}) = \left(\frac{c_j^2}{c_l^2} - |\tilde{\omega}|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{for } j, l = P, S, \\ \xi'_{jl}(k) &= \left(|\bar{k}|^2 - \frac{c_j^2}{c_l^2} |k|^2 \right)^{1/2}, \quad \gamma'_{jl}(\tilde{\omega}) = \left(|\tilde{\omega}|^2 - \frac{c_j^2}{c_l^2} \right)^{1/2} \quad \text{for } j, l = P, S, \\ \tilde{\gamma}_{Rj} &= \left(1 - \frac{c_R^2}{c_j^2} \right)^{1/2} \quad \text{for } j = P, S \end{aligned}$$

ここで、 c_R^2 は $0 < c_R^2 < \frac{\mu_0}{\rho_0}$ を満たす定数である。さらに

$$\mathbb{E}_{SV} = \left\{ k \in \mathbf{R}_+^3; k_3 > \left(\frac{c_P^2}{c_S^2} - 1 \right)^{1/2} |\bar{k}| \right\}, \quad \mathbb{E}_{SV}^0 = \left\{ k \in \mathbf{R}_+^3; 0 < k_3 < \left(\frac{c_P^2}{c_S^2} - 1 \right)^{1/2} |\bar{k}| \right\},$$

とおく。そして

$$\begin{aligned} \hat{k} &= (\bar{k}, -k_3), \quad k_{PS} = (\bar{k}, \xi_{PS}(k)) = |k|(\tilde{\omega}, \gamma_{PS}(\tilde{\omega})), \\ k_{SP} &= \begin{cases} (\bar{k}, \xi_{SP}(k)) = |k|(\tilde{\omega}, \gamma_{SP}(\tilde{\omega})) & (k = |k|\omega \in \mathbb{E}_{SV}), \\ (\bar{k}, i\xi_{SP}(k)) = |k|(\tilde{\omega}, i\gamma'_{SP}(\tilde{\omega})) & (k = |k|\omega \in \mathbb{E}_{SV}^0) \end{cases} \end{aligned}$$

とおく．以上を用いて L_0 の一般化された固有関数が次のように与えられる：

(1) $k \in \mathbb{R}_+^3$ に対して

$$\Psi_P(x, k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}}} \left\{ e^{i\hat{k} \cdot x} \mathbf{a}_P^{(1)}(\omega) + e^{ik_{PS} \cdot x} \mathbf{a}_P^{(2)}(\omega) - e^{ik \cdot x} \mathbf{a}_P^{(3)}(\omega) \right\},$$

ただし、 $\alpha_{PS}^{(\pm)}(\omega) = (\frac{c_P^2}{c_S^2} - 2|\tilde{\omega}|^2)^2 \pm 4|\tilde{\omega}|^2 \omega_3 \gamma_{PS}(\tilde{\omega})$, $\beta_{PS}(\omega) = 4|\tilde{\omega}|(\frac{c_P^2}{c_S^2} - 2|\tilde{\omega}|^2) \omega_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P^{(1)}(\omega) &= {}^t(\omega_1, \omega_2, -\omega_3) \\ \mathbf{a}_P^{(2)}(\omega) &= \frac{\beta_{PS}(\omega)}{\alpha_{PS}^{(+)}(\omega)} {}^t\left(\frac{\omega_1 \gamma_{PS}(\tilde{\omega})}{|\tilde{\omega}|}, \frac{\omega_2 \gamma_{PS}(\tilde{\omega})}{|\tilde{\omega}|}, -|\tilde{\omega}|\right) \\ \mathbf{a}_P^{(3)}(\omega) &= \frac{\alpha_{PS}^{(-)}(\omega)}{\alpha_{PS}^{(+)}(\omega)} {}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3). \end{aligned}$$

(2) $k \in \mathbb{R}_+^3$ に対して

$$\Psi_{SV}(x, k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}}} \left\{ e^{i\hat{k} \cdot x} \mathbf{a}_{SV}^{(1)}(\omega) + e^{ik \cdot x} \mathbf{a}_{SV}^{(2)}(\omega) + e^{ik_{SP} \cdot x} \mathbf{a}_{SV}^{(3)}(\omega) \right\},$$

ただし、 $\beta_{SP}(\omega) = 4|\tilde{\omega}|(1 - 2|\tilde{\omega}|^2) \omega_3$,

$$\alpha_{SP}^{(\pm)}(\omega) = \begin{cases} (\frac{c_P^2}{c_S^2} - 2|\tilde{\omega}|^2)^2 \pm 4|\tilde{\omega}|^2 \omega_3 \gamma_{PS}(\tilde{\omega}) & (k = |k|\omega \in \mathbb{E}_{SV}), \\ (\frac{c_P^2}{c_S^2} - 2|\tilde{\omega}|^2)^2 \pm 4i|\tilde{\omega}|^2 \omega_3 \gamma'_{PS}(\tilde{\omega}) & (k = |k|\omega \in \mathbb{E}_{SV}^0), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{SV}^{(1)}(\omega) &= {}^t\left(\frac{\omega_1 \omega_3}{|\tilde{\omega}|}, \frac{\omega_2 \omega_3}{|\tilde{\omega}|}, |\tilde{\omega}|\right) \\ \mathbf{a}_{SV}^{(2)}(\omega) &= \frac{\alpha_{SP}^{(-)}(\omega)}{\alpha_{SP}^{(+)}(\omega)} {}^t\left(\frac{\omega_1 \omega_3}{|\tilde{\omega}|}, \frac{\omega_2 \omega_3}{|\tilde{\omega}|}, -|\tilde{\omega}|\right) \\ \mathbf{a}_{SV}^{(3)}(\omega) &= \begin{cases} \frac{\beta_{SP}(\omega)}{\alpha_{SP}^{(+)}(\omega)} {}^t(\omega_1, \omega_2, \gamma_{SP}(\tilde{\omega})) & (k = |k|\omega \in \mathbb{E}_{SV}), \\ \frac{\beta_{SP}(\omega)}{\alpha_{SP}^{(+)}(\omega)} {}^t(\omega_1, \omega_2, i\gamma'_{SP}(\tilde{\omega})) & (k = |k|\omega \in \mathbb{E}_{SV}^0), \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $k \in \mathbb{R}_+^3$ に対して

$$\Psi_{SH}(x, k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}}} (e^{i\hat{k} \cdot x} + e^{ik \cdot x}) \mathbf{a}_{SH}(\omega),$$

ただし、

$$\mathbf{a}_{SH}(\omega) = {}^t\left(-\frac{\omega_2}{|\tilde{\omega}|}, \frac{\omega_1}{|\tilde{\omega}|}, 0\right).$$

(4) $p \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\Psi_R(x, p) = \frac{\tilde{C}}{2\pi} |p|^{\frac{1}{2}} e^{ip \cdot \bar{x}} \left\{ e^{-|p| \tilde{\gamma}_{RP} x_3} \mathbf{a}_R^{(1)}(\nu) + e^{-|p| \tilde{\gamma}_{RS} x_3} \mathbf{a}_R^{(2)}(\nu) \right\},$$

ただし、

$$\mathbf{a}_R^{(1)}(\nu) = \left(2 - \frac{c_R^2}{c_S^2}\right) {}^t(-i\nu_1, i\nu_2, \tilde{\gamma}_{RP}), \mathbf{a}_R^{(2)}(\nu) = -2\tilde{\gamma}_{RP} {}^t(-i\nu_1 \tilde{\gamma}_{RS}, i\nu_2 \tilde{\gamma}_{RS}, -1)$$

そして $\tilde{C}$ は

$$4\pi^2 \int_0^\infty |\Psi_R(x, p)|^2 \rho_0 dx_3 = 1.$$

を満たす正の定数である .

これらはそれぞれ :

$\Psi_P(x, k)$: incident P wave + reflected S wave + reflected P wave

$\Psi_{SV}(x, k)$: incident S wave + reflected S wave + reflected P wave

$\Psi_{SH}(x, k)$: incident S wave + reflected S wave

$\Psi_R(x, p)$: Rayleigh wave

を表す関数である . これらを用いて作用素 F_j ($j = P, SV, SH$) と F_R を次で定義する (まず $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^3, \mathbb{C}^3)$ とする):

$$F_j \mathbf{u}(k) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \overline{\Psi_j(x, k)} \cdot \mathbf{u}(x) \rho_0 dx,$$

$$F_R \mathbf{u}(p) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \overline{\Psi_R(x, p)} \cdot \mathbf{u}(x) \rho_0 dx.$$

このとき F_j ($j = P, SV, SH$) は $\mathcal{H}$ から $L^2(\mathbb{R}_+^3)$ への、そして F_R は $\mathcal{H}$ から $L^2(\mathbb{R}^2)$ への部分等距離作用素に拡張できる . これらを用いて作用素 F を次で定義する :

$$F\mathbf{u} = (F_P \mathbf{u}, F_{SV} \mathbf{u}, F_{SH} \mathbf{u}, F_R \mathbf{u}) \quad \text{for } \mathbf{u} \in \mathcal{H},$$

これらについて [3] は次を示している :

補題 1. F は $\mathcal{H}$ から

$$\hat{\mathcal{H}} = \bigoplus_{j=P,SV,SH} L^2(\mathbb{R}_+^3) \bigoplus L^2(\mathbb{R}^2)$$

への unitary 作用素である . また、 $\mathbf{u} \in D(L_0)$ に対して、次が成立する :

$$FL_0 \mathbf{u} = (c_P^2 |k|^2 F_P \mathbf{u}, c_S^2 |k|^2 F_{SV} \mathbf{u}, c_S^2 |k|^2 F_{SH} \mathbf{u}, c_R^2 |p|^2 F_R \mathbf{u}).$$

3. グリーン関数および主結果

$z = \lambda + i\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \neq 0$ に対する L_0 のレゾルベントを $R_0(z)$ とかくことにする (すなわち $R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}$) . この補題 1 を用いると、 $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ かつ $\text{supp } \mathbf{u}$ が compact である $\mathbf{u}$ に対して、 L_0 のレゾルベントは次のようにかける :

$$\begin{aligned} R_0(z) \mathbf{u} &= \sum_{j=P,SV,SH} F_j^* (c_j^2 |k|^2 - z)^{-1} F_j \mathbf{u} + F_R^* (c_R^2 |p|^2 - z)^{-1} F_R \mathbf{u} \\ &= \sum_{j=P,SV,SH} \int_{\mathbb{R}_+^3} G_j(x, y; z) u(y) dy + \int_{\mathbb{R}_+^3} G_R(x, y; z) u(y) dy \end{aligned}$$

ただし

$$c_j = \begin{cases} c_P & (j = P), \\ c_S & (j = SV, SH), \end{cases}$$

$$(3.1) \quad G_j(x, y; z) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{1}{c_j^2 |k|^2 - z} \psi_j(x, k) \overline{{}^t \psi_j(y, k)} dk \quad (j = P, SV, SH),$$

$$(3.2) \quad G_R(x, y; z) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{c_R^2 |p|^2 - z} \psi_R(x, p) \overline{{}^t \psi_R(y, p)} dp$$

である．(1) と (2) の右辺積分の収束性の議論が必要であるが、グリーン関数は各モードごとに、次のように (形式的に) 定義される：

$$G_j(x, y; \lambda \pm i0) = \lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} G_j(x, y; z) \quad (j = P, SV, SH, R).$$

上記の λ は入射波の周波数を、 y は地震波で例えると震源 (散乱理論に応用の際は散乱体の位置に関する情報) を、そして x は波の観測点を表す．研究の目標は、 $G_j(x, y, \lambda \pm i0)$ の $|x| \rightarrow \infty$ に対する漸近挙動の決定である．そして、これから散乱体から十分離れた位置で観測されるであろう波形が決定できる．

以下において、(3.1) と (3.2) の積分の収束性および今回の主結果 (定理 2) について説明しよう．まず、 $0 < a < b$ を任意に固定する．そして $a < \lambda < b$ とする． a, b に対して $\Phi_l(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($l = 1, 2$) は次を満たすものとする：

$$\Phi_1(s) = \begin{cases} 1 & (a/2 < s < 3b/2), \\ 0 & (s < a/3, 2b < s), \end{cases} \quad \Phi_2(s) = 1 - \Phi_1(s).$$

これらを用いて、次のように分解する：

$$G_j(x, y; z) = \sum_{l=1,2} G_j^{(l)}(x, y; z) \quad (j = P, SV, SH, R),$$

ただし、

$$G_j^{(l)}(x, y; z) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{\Phi_l(c_j^2 |k|^2)}{c_j^2 |k|^2 - z} \psi_j(x, k) \overline{{}^t \psi_j(y, k)} dk \quad (j = P, SV, SH),$$

$$G_R^{(l)}(x, y; z) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Phi_l(c_R^2 |p|)}{c_R^2 |p|^2 - z} \psi_R(x, p) \overline{{}^t \psi_R(y, p)} dp$$

である．

$l = 1$ のときは

$$(3.3) \quad G_j^{(1)}(x, y; z) = \int_0^\infty \frac{\mu^2 \Phi_1(c_j^2 \mu^2)}{c_j^2 \mu^2 - z} J_j(x, y, \mu) d\mu \quad (j = P, SV, SH),$$

$$(3.4) \quad G_R^{(1)}(x, y; z) = \int_0^\infty \frac{\tau \Phi_1(c_R^2 \tau^2)}{c_R^2 \tau^2 - z} J_R(x, y, \tau) d\tau$$

ただし、

$$J_j(x, y, \mu) = \int_{\mathbb{S}_+^2} \psi_j(x, \mu\omega) \overline{{}^t \psi_j(y, \mu\omega)} d\omega, \quad (j = P, SV, SH),$$

$$J_R(x, y, \tau) = \int_{\mathbb{S}^1} \psi_R(x, \tau\nu) \overline{{}^t \psi_R(y, \tau\nu)} d\nu$$

である．

まず、 $J_j(x, y, \mu)$ ($j = P, SV, SH$), $J_R(x, y, \tau)$ に対する結果 (本講演の主結果) を述べる．その前にさらに幾つかの記号等を導入する：

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}, x_3) = |x|\varphi = r(\tilde{\varphi}, \varphi_3) = r(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad \tilde{\varphi} = (-\tilde{\varphi}, \varphi_3),$$

$$\varphi_{jl} = (\tilde{\varphi}, \gamma_{jl}(\tilde{\varphi})), \quad \bar{x} = |\bar{x}|\bar{\varphi} = \bar{r}\bar{\varphi}.$$

とする．そして

$$\begin{aligned}
I_P(x, y, \mu) &= e^{-i\mu r} \mathbf{a}_P^{(1)}(\check{\varphi}) \overline{{}^t\Psi_P(y, \mu\check{\varphi})} - e^{i\mu r} \mathbf{a}_P^{(3)}(\varphi) \overline{{}^t\Psi_P(y, \mu\varphi)} \\
&\quad - \chi_{|\check{\varphi}| < \frac{c_S}{c_P}} e^{i\mu \frac{c_P}{c_S} r} \frac{c_P}{c_S} \frac{\varphi_3}{\gamma_{SP}(\tilde{\omega})} \mathbf{a}_P^{(2)}\left(\frac{c_P}{c_S} \varphi_{SP}\right) \overline{{}^t\Psi_P\left(y, \frac{c_S}{c_P} \mu \varphi_{PS}\right)}, \\
I_{SV}(x, y, \mu) &= e^{-i\mu r} \mathbf{a}_{SV}^{(1)}(\check{\varphi}) \overline{{}^t\Psi_{SV}(y, \mu\check{\varphi})} - e^{i\mu r} \mathbf{a}_{SV}^{(2)}(\varphi) \overline{{}^t\Psi_{SV}(y, \mu\varphi)} \\
&\quad - e^{i\mu \frac{c_S}{c_P} r} \frac{c_S}{c_P} \frac{\gamma_{PS}(\tilde{\omega})}{\varphi_3} \mathbf{a}_{SV}^{(3)}\left(\frac{c_S}{c_P} \varphi_{PS}\right) \overline{{}^t\Psi_{SV}\left(y, \frac{c_S}{c_P} \mu \varphi_{PS}\right)}, \\
I_{SH}(x, y, \mu) &= e^{-i\mu r} \mathbf{a}_{SH}(\check{\varphi}) \overline{{}^t\Psi_{SH}(y, \mu\check{\varphi})} - e^{i\mu r} \mathbf{a}_{SH}(\varphi) \overline{{}^t\Psi_{SH}(y, \mu\varphi)}, \\
I_R(x, y, \tau) &= e^{\frac{\pi i}{4}} e^{-i\tau \bar{r}} \left\{ e^{-\tau \tilde{\gamma}_{RP} x_3} \mathbf{a}_R^{(1)}(-\bar{\varphi}) + e^{-\tau \tilde{\gamma}_{RS} x_3} \mathbf{a}_R^{(2)}(-\bar{\varphi}) \right\} {}^t\Psi_R(y, -\tau \bar{\varphi}) \\
&\quad + e^{-\frac{\pi i}{4}} e^{i\tau \bar{r}} \left\{ e^{-\tau \tilde{\gamma}_{RP} x_3} \mathbf{a}_R^{(1)}(\bar{\varphi}) + e^{-\tau \tilde{\gamma}_{RS} x_3} \mathbf{a}_R^{(2)}(\bar{\varphi}) \right\} {}^t\Psi_R(y, \tau \bar{\varphi})
\end{aligned}$$

とおく．また行列 $(a_{ij})_{i,l=1,2,3}$ に対して $|(a_{ij})_{i,l=1,2,3}| = \max_{i,j=1,2,3} |a_{ij}|$ とかくことにする．これらについて、次を得た：

定理 2. M, a, b ($0 < a < b, M > 0$) を任意に固定する．このとき次の (1) から (3) が成立する：

(1) $|y| < M, a/3 < c_P^2 \mu^2 < 2b$ を満たす y, μ に対して一様に

$$\left| J_P(x, y, \mu) - \frac{i}{(2\pi\rho_0)^{\frac{1}{2}} \mu r} I_P(x, y, \mu) \right| = o(r^{-1}) \quad (r \rightarrow \infty).$$

(2) $j = SV, SH$ のとき, $|y| < M, a/3 < c_S^2 \mu^2 < 2b$ を満たす y, μ に対して一様に

$$\left| J_j(x, y, \mu) - \frac{i}{(2\pi\rho_0)^{\frac{1}{2}} \mu r} I_j(x, y, \mu) \right| = \begin{cases} O(r^{-1} |\log \frac{\bar{r}}{r}|) & (x_3 > \bar{r} \sqrt{\bar{r} - 1}, \quad r \rightarrow \infty), \\ o(r^{-1}) & (0 < x_3 < \bar{r} \sqrt{\bar{r} - 1}, \quad r \rightarrow \infty). \end{cases}$$

(3) $|y| < M, a/3 < c_R^2 \tau^2 < 2b$ を満たす y, τ に対して一様に

$$\left| J_R(x, y, \tau) - \frac{\tilde{C}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (\tau \bar{r})^{\frac{1}{2}}} I_R(x, y, \tau) \right| = O(\bar{r}^{-\frac{3}{2}}) \left(e^{-\sqrt{\frac{a}{3}} c_R^{-1} \tilde{\gamma}_{RP} x_3} + e^{-\sqrt{\frac{a}{3}} c_R^{-1} \tilde{\gamma}_{RS} x_3} \right) \quad (\bar{r} \rightarrow \infty)$$

注意 3. (2) の SV については $(i, j) = (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 1), (3, 2)$ ならば

$$\left| \left(J_{SV}(x, y, \mu) - \frac{i}{(2\pi\rho_0)^{\frac{1}{2}} \mu r} I_{SV}(x, y, \mu) \right)_{ij} \right| = o(r^{-1}) \quad (r \rightarrow \infty)$$

となる．また SH については $(i, j) = (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 1), (3, 2)$ は 0 である．

定理 2 は定常位相の方法によって証明される．しかし、藤原 [4], [12] などで述べられている標準的な定常位相の方法の適用による証明は困難である．標準的な定常位相の方法は被積分関数に滑らかさを仮定した上、そのサポートが積分領域内部に完全に含まれることも仮定しているからである．定常位相の方法を適用する際、半空間弾性波の固有関数が被積分関数となるのであるが、冒頭で述べた半空間弾性波の固有関数の特異性は標準的な定常位相の方法の適用条件を満たさない．そこで、標準的な定常位相の方法に Copson[1] と Lewis[15] のアイデアを盛り込んで改良し、その適用を以って証明を与えた。

(3.3) と (3.4) の右辺積分は $\epsilon \neq 0$ のとき収束していることに注意すると、(複素積分を用いた) 良く知られた議論により

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} G_j^{(1)}(x, y; z) = \text{p.v.} \int_0^\infty \frac{\mu^2 \Phi_1(c_j^2 \mu^2)}{c_j^2 \mu^2 - \lambda} J_j(x, y, \mu) d\mu \pm \pi i J_j(x, y, c_j^{-1} \lambda^{\frac{1}{2}}), \quad (j = P, SV, SH),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} G_R^{(1)}(x, y; z) = \text{p.v.} \int_0^\infty \frac{\tau \Phi_1(c_R^2 \tau^2)}{c_R^2 \tau^2 - \lambda} J_R(x, y, \tau) d\tau \pm \pi i J_R(x, y, c_R^{-1} \lambda^{\frac{1}{2}})$$

となる．そして上記右辺を $G_j^{(1)}(x, y; \lambda \pm i0)$ ($j = P, SV, SH, R$) とかくことにする．

$G_j^{(2)}(x, y; z)$ ($j = P, SV, SH, R$) については、やはり固有関数の特異性に留意した部分積分を用いた議論により、積分の収束性 ($\epsilon = 0$ とした場合も含めて) がわかり、さらに空間遠方 ($|x| \rightarrow \infty$) に関する次の評価を得る：

定理 4. M, a, b ($0 < a < b, M > 0$) を任意に固定する．このとき次の (1) から (4) が成立する：

(1) $\lambda_0 > 0$ を仮定すると、 $|y| < M, a < \lambda < b$ を満たす y, λ に対して一様に

$$|G_P^{(2)}(x, y; \lambda)| = o(r^{-1}) \quad (r \rightarrow \infty).$$

(2) $|y| < M, y_3 \neq 0, a < \lambda < b$ を満たす y, λ に対して一様に

$$|G_{SV}^{(2)}(x, y; \lambda)| = o(r^{-1}) \quad (r \rightarrow \infty).$$

(3) $|y| < M, a < \lambda < b$ を満たす y, λ に対して一様に

$$|G_{SH}^{(2)}(x, y; \lambda)| = o(r^{-1}) \quad (r \rightarrow \infty).$$

(4) $|y| < M, a < \lambda < b$ を満たす y, λ に対して一様に

$$|G_R^{(2)}(x, y; \lambda)| = O(r^{-2}) \quad (r \rightarrow \infty).$$

注意 5. (2) について：

(1) $y_3 \neq 0$ は

$$G_{SV}^{(2)}(x, y; \lambda) = \int_{E_{SV}} \frac{\Phi_2(c_S^2 |k|^2)}{c_S^2 |k|^2 - \lambda} \psi_{SV}(x, k) \overline{{}^t \psi_{SV}(y, k)} dk + \int_{E_{SV}^0} \frac{\Phi_2(c_S^2 |k|^2)}{c_S^2 |k|^2 - \lambda} \psi_{SV}(x, k) \overline{{}^t \psi_{SV}(y, k)} dk$$

と分解した際の第 2 項に対する評価で必要となる．

(2) 上記第 2 項について、 $\mathbf{u}(x) \in C^2(\mathbb{R}_+^3)$ かつ $\text{supp} \mathbf{u}(x)$ がコンパクトならば、次が成立する：

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+^3} \int_{E_{SV}^0} \frac{\Phi_2(c_S^2 |k|^2)}{c_S^2 |k|^2 - \lambda} \psi_{SV}(x, k) \overline{{}^t \psi_{SV}(y, k)} dk \mathbf{u}(y) dy \right| = o(|x|^{-1})$$

REFERENCES

- [1] E.T.Copson, Asymptotic Expansions. Cambridge Tracts in Mathematics 55, Cambridge Univ. Press, 1965.
- [2] D.Colton and R.Kress, Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Appl.Math.Sci.Vol.50, Springer-Verlag, 1997.
- [3] Y. Dermenjian and J.C. Guillot, *Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary. The limiting absorption principle*, Math. Meth. in the Appl. Sci. 10 (1988), 87–124.
- [4] 藤原大輔, 線形偏微分方程式論における漸近的方法．岩波基礎数学講座, 岩波書店, 1976
- [5] 今村勤, 物理とグリーン関数. 物理と数学シリーズ 4, 岩波書店, 1979.
- [6] M.Kadowaki, *On a framework of scattering for dissipative systems*. Osaka J. Math. 40 (2003), no. 1, 245–270.

- [7] M.Kawashita, W.Kawashita and H.Soga, *Relation between scattering theories of the Wilcox and Lax-Phillips types and a concrete construction of the translation representation*. Comm. Partial Differential Equations 28 (2003), no. 7-8,1437–1370
- [8] ———, *Scattering theory for the elastic wave equation in perturbed half-spaces*. Tran. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 12, 5319–5350.
- [9] M. Kawashita and H. Soga, *Singular support of the scattering kernel for the Rayleigh wave in perturbed half-spaces*. Method Appl. Anal. 17 (2010), no.1, 1–47
- [10] K. Kikuchi, *Asymptotic behavior at infinity of the Green function of a class of systems including wave propagation in crystals*. Osaka J. Math.22 (1985), no. 3, 575–635.
- [11] 小林昭一編著, 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- [12] 松村 睦豪, 定常および非定常波動伝播問題の基本解の若干の性質について (), 「函数方程式」第 24 巻・別冊, 1972
- [13] M. Matsumura, *Asymptotic behavior at infinity for Green's functions of first order systems with characteristics of nonuniform multiplicity*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 12 (1976), no. 2, 317–377.
- [14] R.G.Newton, *Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensions*. Text and Monographs in Physics, Springer-Verlag,1989.
- [15] R. Lewis, *Asymptotic theory of transients, "Electromagnetic wave theory"* , URSI Symposium, Proceedings, Delft, Pergamon Press, New York, 1967.