

双曲型発展方程式に対する抽象的コーシー問題*

吉井 健太郎 (東京理大・理)

本講演では, [5] に基づいて Hilbert 空間における線形発展方程式の抽象定理を紹介し, 定理が時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 型方程式の Cauchy 問題に適用されることを示す.

1. Abstract Result

Hilbert 空間 X 上の 閉線形作用素族 $\{A(t); t \in I := [0, T]\}$ について, 次のような線形発展方程式の抽象的 Cauchy 問題を考える:

$$(ACP) \quad \begin{cases} (d/dt)u(t) + A(t)u(t) = f(t), & t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

$\{A(t); t \in I\}$ についての仮定を述べるために正値自己共役作用素 S_0 と正値自己共役作用素族 $\{S(t); t \in I\}$ を用意する:

Assumption on $\{S(t)\}$. まず, S_0 は

$$(u, S_0 u) \geq \|u\|^2 \quad (u \in D(S_0))$$

となるものとし, 作用素族 $\{S(t)\}$ は次の 3 条件を満たすものとする:

(S1) $Y := D(S_0^{1/2}) = D(S(t)^{1/2})$ かつある 定数 $K \geq 1$ で

$$\frac{1}{K} \|S_0^{1/2} u\|^2 \leq (u, S(t)u) \leq K \|S_0^{1/2} u\|^2, \quad u \in D(S(t)), \quad t \in I.$$

(S2) $S(\cdot)^{1/2} \in C_*(I; B(Y, X))$. ここで $B(Y, X)$ は Y から X への有界線形作用素の全体であり, 添え字の $*$ は作用素強位相での連続性を意味する.

(S3) ある非負関数 $\sigma \in L^1(I)$ で

$$\| \|S(t)^{1/2} v\| - \|S(s)^{1/2} v\| \| \leq \left| \int_s^t \sigma(r) dr \right| \max_{r \in \{s, t\}} \|S(r)^{1/2} v\|, \quad v \in Y, \quad t, s \in I.$$

Assumption on $\{A(t)\}$. 作用素族 $\{A(t)\}$ は次の 4 条件を満たすものとする:

(A1) ある非負定数 $\alpha \geq 0$ で $|\operatorname{Re}(A(t)v, v)| \leq \alpha \|v\|^2$, $v \in D(A(t))$, $t \in I$.

(A2) $Y \subset D(A(t))$, $t \in I$.

(A3) ある非負定数 $\beta \geq \alpha$ で $|\operatorname{Re}(A(t)u, S(t)u)| \leq \beta \|S(t)^{1/2} u\|^2$, $u \in D(S(t))$, $t \in I$.

(A4) $A(\cdot) \in C_*(I; B(Y, X))$.

定理 1 ([5]). 上記の仮定の下で次の性質をもつ $A(t)$ の発展作用素

$$\{U(t, s); (t, s) \in \Delta_+ := \{(t, s); 0 \leq s \leq t \leq T\}\}$$

が一意に存在する:

*本講演は岡沢登氏 (東京理大・理) との共同研究に基づくものである.

(i) Δ 上で $B(X)$ への関数として強連続で,

$$\|U(t, s)\|_{B(X)} \leq e^{\alpha(t-s)}, \quad (t, s) \in \Delta_+.$$

(ii) $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$ on Δ_+ かつ $U(s, s) = 1$.

(iii) $U(t, s)Y \subset Y$ かつ Δ 上で $B(Y)$ への関数として強連続で,

$$\|U(t, s)\|_{B(Y)} \leq K \exp \left(\int_s^t \beta + K\sigma(r) dr \right), \quad (t, s) \in \Delta_+.$$

さらに $v \in Y$ とするとき, $U(\cdot, \cdot)v \in C^1(\Delta_+; X)$ で,

(iv) $(\partial/\partial t)U(t, s)v = -A(t)U(t, s)v, \quad (t, s) \in \Delta_+,$

(v) $(\partial/\partial s)U(t, s)v = U(t, s)A(s)v, \quad (t, s) \in \Delta_+.$

定理 2 ([5]). 上記の仮定の下, 初期値 $u_0 \in Y$ 及び非斉次項 $f(\cdot) \in C(I; X) \cap L^1(I; Y)$ に対して

$$u(t) := U(t, 0)u_0 + \int_0^t U(t, s)f(s) ds$$

とおくと, $u(\cdot)$ は (ACP) の一意 Y -値解 $u(\cdot) \in C^1(I; X) \cap C(I; Y)$ となる.

注意. 定理 1, 2 は Okazawa [3] の一般化に他ならず, $S(t) \equiv S_0$ をたんに S とすると一致する. 言い換えれば, 定理 1, 2 では [3] の S の役割を S_0 と $\{S(t)\}$ に振り分けているとみなせる.

2. Schrödinger equations with moving Coulomb singularities

$\Sigma^2(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^2(\mathbb{R}^N); (1 + |x|^2)u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ とする. このとき, 次のような中心が動く複数の Coulomb ポテンシャルを伴った Schrödinger 方程式の初期値問題を考える:

$$(P) \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + V_0(t, x)u + \sum_{j=1}^m \frac{e_j u}{|x - c_j(t)|} + \sum_{1 \leq j < k \leq m} \frac{e_j e_k u}{|c_j(t) - c_k(t)|} = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in \Sigma^2 = \Sigma^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

ここで $N \geq 3$, u は複素数値の未知関数 $u : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ とし, $e_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), $c_j : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($j = 1, 2, \dots, m$), $V_0 : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ とする. $N = 3$ のとき, (P) は m 個の原子核と外力場 V_0 が存在する空間における電子の運動を記述していると見なせる. このとき, u は電子の波動関数を表す.

後述の仮定 (c2) より, 斥力ポテンシャルは特異点を生成しないので

$$V(t, x) := V_0(t, x) + \sum_{1 \leq j < k \leq m} \frac{e_j e_k}{|c_j(t) - c_k(t)|}$$

として, 次の初期値問題を考える:

$$(SE) \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + V(t, x)u + \sum_{j=1}^m \frac{e_j u}{|x - c_j(t)|} = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in \Sigma^2. \end{cases}$$

定理 3. $\{c_j\}$, V は以下の仮定を満たすものとする:

- (c1) $c_j \in W^{2,1}(I; \mathbb{R}^N) \quad (j = 1, 2, \dots, m),$
- (c2) $c_j(t) \neq c_k(t) \quad (t \in I, j \neq k),$
- (V1) $(1 + |x|^2)^{-1}V \in W^{1,1}(I; L^\infty(\mathbb{R}^N)),$
- (V2) $V \in L^1(I; W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)).$

このとき, (SE) は Σ^2 -値解 $u \in C^1(I; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C(I; \Sigma^2(\mathbb{R}^N))$ を一意にもつ.

残念ながら, ポテンシャルの特異点が動くため直接 (SE) に定理 1, 2 を適用することはできない. 一方で $m = 1$ のときには, 時間に依存した Galilei 変換 (平行移動) $x := y + c_1(t)$ を用いて $v(t, y) := u(t, y + c_1(t))$ とおくと特異点が固定された問題に帰着される:

$$i \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{1}{i} \nabla - \frac{1}{2} c_1'(t) \right)^2 v - \frac{1}{4} |c_1'(t)|^2 v + V(t, y + c_1(t))v + \frac{e_1}{|y|} v = 0$$

この場合については Baudoin-Kavian-Puel [1] や, Okazawa-Yokota-Y. [4], Y. [6] といった先行研究がある. また, Kato-Yajima [2] では Liénard-Wiechert ポテンシャルをもつ Dirac 方程式について局所擬 Lorentz 変換 (Local pseudo-Lorentz transformation) と呼ばれる変換を用いてポテンシャルの特異点を固定している.

今回, Kato-Yajima [2] のアイディアを元に局所擬 Galilei 変換とでも呼ぶべき変換を構成し, この変換を用いて Coulomb ポテンシャルの特異点の動きを固定することで抽象定理を適用できる新たな Schrödinger 型方程式を構成する.

3. Local pseudo-Galilean transformation

変換を定めるために (SE) を時間について短い区間毎に考える. まず仮定 (c1), (c2) より, 次の 2 つの定数が定まる:

$$\begin{aligned} \|c'\|_{L^\infty(I)} &:= \max\{\|c_j'\|_{L^\infty(I)^N}; j = 1, \dots, m\} < \infty, \\ \varepsilon_0 &:= \frac{1}{4} \min\{|c_j(t) - c_k(t)|; t \in I, 1 \leq j < k \leq m\} > 0. \end{aligned}$$

このとき,

$$T_0 := \min\left\{T, \frac{\varepsilon_0}{2\|c'\|_{L^\infty(I)}}\right\}$$

として (SE) の区間 $I_1 := [0, T_0]$ に制限された問題 (SE) $_{I_1}$ を考える. (SE) $_{I_1}$ の Σ^2 -値解

$$u \in C^1(I_1; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C(I_1; \Sigma^2(\mathbb{R}^N))$$

が構成されるとき, $I_k := [(k-1)T_0, kT_0]$ ($k = 2, 3, 4, \dots$) に制限された問題 (SE) $_{I_k}$ についても同様の議論を繰り返すことで (SE) の Σ^2 -値解を構成できる. ゆえに, 特に $T_0 = T$, 即ち $I_1 = I$ となる場合を考えれば十分である.

定義 (局所擬 Galilei 変換). $\varphi \in C(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ を t を固定するごとに $\mathbb{R}^N$ についての微分同相写像となるものとし, $\varphi(t, \cdot)$ のヤコビアンは $J_y \varphi := \det(\text{Jac}_y \varphi) > 0$ となるものとする. ここで $\text{Jac}_y \varphi = (\partial \varphi_j / \partial y_k)_{jk}$. φ を用いて $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の時間依存ユニタリ変換 $\Phi(t) \in B(L^2(\mathbb{R}^N))$ を次のように定義する:

$$\Phi(t)g := (J_y \varphi(t, \cdot))^{1/2} (g \circ \varphi)(t, \cdot), \quad g \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

特に Φ が次の φ によって与えられるとき, Φ を局所擬 Galilei 変換と呼ぶこととする:

$$(1) \quad \varphi(t, y) := y + \sum_{j=1}^m \zeta\left(\frac{|y - c_j(0)|}{\varepsilon_0}\right) (c_j(t) - c_j(0)).$$

ここで $\zeta \in C^\infty([0, \infty); [0, 1])$ は $\zeta(r) = 1$ ($r \leq 1$), $\zeta(r) = 0$ ($r \geq 2$) かつ $|\zeta'(r)| \leq 3/2$ となる単調減少関数とする.

新しい未知関数

$$v(t, y) := (\Phi(t)u)(t, y) = (J_y \varphi(t, y))^{1/2} u(t, \varphi(t, y))$$

を導入する. このとき, (局所擬 Galilei 変換に限らず) φ が十分滑らかならば (SE) は次のような v についての Schrödinger 型方程式に変換される:

$$(SE-v) \quad \begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{1}{i} \operatorname{div} - b(t, y) \right) a(t, y) \left(\frac{1}{i} \nabla - b(t, y) \right) v + r(t, y) v \\ \quad + V(t, \varphi(t, y)) v + \sum_{j=1}^m \frac{e_j v}{|\varphi(t, y) - c_j(t)|} = 0, \\ v(\cdot, 0) = v_0 := \Phi(0)u_0. \end{cases}$$

ここで

$$\begin{aligned} a(t, y) &:= (\operatorname{Jac}_y \varphi(t, y))^{-1} {}^t(\operatorname{Jac}_y \varphi(t, y))^{-1}, \\ b(t, y) &:= \frac{1}{2} {}^t(\operatorname{Jac}_y \varphi(t, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y), \\ r(t, y) &:= -\frac{1}{4} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) \right|^2 + (J_y \varphi(t, y))^{1/2} [\Delta_x (J_x \psi(t, x))^{1/2}]_{x=\varphi}. \end{aligned}$$

ただし, $\psi(t, \cdot)$ は t を固定することに定まる $\varphi(t, \cdot)$ の逆関数.

特に φ を (1) によって与えるとき, 即ち変換として局所擬 Galilei 変換を用いるとき,

$$h(t, y) := \sum_{j=1}^m e_j \left(\frac{1}{|\varphi(t, y) - c_j(t)|} - \frac{1}{|y - c_j(0)|} \right), \quad t \in I$$

は有界かつ十分滑らかな関数となり, 複数の Coulomb ポテンシャルの特異点の動きが固定される. よって, 抽象定理が適用できることが確かめられる, (SE- v) に抽象定理を適用することができ, (SE- v) 及び (SE) の Σ^2 -値解が得られる.

References

- [1] L. Baudouin, O. Kavian and J.-P. Puel, *Regularity for a Schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control*, J. Differential Equations **216** (2005), 188–222.
- [2] T. Kato and K. Yajima, *Dirac equations with moving nuclei*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **54** (1991), 209–221.
- [3] N. Okazawa, *Remarks on linear evolution equations of hyperbolic type in Hilbert space*, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998), 399–423.
- [4] N. Okazawa, T. Yokota and K. Yoshii, *Remarks on linear Schrödinger evolution equations with Coulomb potential with moving center*, SUT J. Math. **46** (2010), 155–176.
- [5] N. Okazawa and K. Yoshii, *Linear Schrödinger evolution equations with moving Coulomb singularities*, to appear.
- [6] K. Yoshii, *Classical solutions to a linear Schrödinger evolution equation involving a Coulomb potential with a moving center of mass*, Funkcialaj Ekvacioj **54** (2011), 485–493.