

Multiple points blowup for the two-dimensional Keller–Segel system

関 行宏 (東工大 学振PD)

1 Keller–Segel 系

細胞性粘菌の走化性運動を記述する 2 次元 Keller–Segel 系を考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ 0 = \Delta v + u - k_0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界領域または全平面とし, $k_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx$ とする. 未知関数 u と v はそれぞれ細胞性粘菌の密度, その粘菌から放出される化学物質の濃度を表す. 初期値について $0 \leq u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\Omega)$, $|x|^2 u_0 \in L^1(\Omega)$ を満たすと仮定する. $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ のときはノイマン境界条件を課す:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (2)$$

ここで $\partial/\partial\nu$ は法線微分を意味する. $\Omega = \mathbb{R}^2$ のときは境界条件を考えない.

上記の (いわゆる放物–楕円型) Keller–Segel 系は第 2 方程式を放物型方程式とした本来の Keller–Segel 系を単純化したモデルとして 1990 年代に Jäger–Luckhaus [3] により導入され, その後多くの研究者らによって時間大域解の存在や非存在, 大域解の漸近挙動, 爆発解の振る舞い等が活発に研究されてきた.

初期値 u_0 に適当な微分可能性を仮定すると問題 (1) は一意な¹時間局所解を持つ. 以下, その最大存在時刻を T で表す. 周知のように, $T < +\infty$ なら

$$\limsup_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty \quad (3)$$

となる. 一般に, 全質量 $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ が 8π より大きいとき, 解が有限時間で爆発する [1].

2 Chemotactic collapse

2 次元 Keller–Segel 系 (1) における解の爆発は特異点集合が**離散的**であり, 爆発時に **Dirac δ 型の特異性**を形成する (凝集とも呼ぶ) という顕著な特徴がある. このような爆

¹ v に定数を加えることを除く

発解が存在することは 1970 年代から予想されていたが, Ω が円板である場合に Herrero–Velázquez [2] によって初めて証明された. 彼らの構成した球対称爆発解は原点のみを爆発点に持ち, ある非負値関数 $\psi \in L^1(\Omega)$ が存在して,

$$u(x, t) \rightarrow 8\pi\delta + \psi \quad \text{in } \mathcal{M}(\Omega), \quad \text{as } t \rightarrow T^-, \quad (4a)$$

$$\psi(x) \sim \frac{C}{|x|^2} \exp(-2\sqrt{|\log|x||}), \quad \text{as } |x| \rightarrow 0 \quad (4b)$$

を満たす. 一般に有限時間 T で爆発する解 (u, v) の爆発集合 S は有限個の点からなり,

$$u(\cdot, t) \rightarrow \sum_{q \in S} m(q)\delta_q + f \quad \text{as } t \rightarrow T^-, \quad (5a)$$

$$0 \leq f \in L^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus S), \quad m(q) \geq m^*(q) := \begin{cases} 8\pi, & q \in \Omega, \\ 4\pi, & q \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5b)$$

という爆発形状を持つ. さらに, 爆発点の個数の評価

$$8\pi\sharp(S \cap \Omega) + 4\pi\sharp(S \cap \partial\Omega) \leq \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \quad (6)$$

が成り立つ [7]. 以上の結果は Ω が非有界であっても成り立つ. 定数 $m(q)$ は爆発点 q に凝集する粘菌の質量と解釈される. 球対称な爆発解に対して $S = \{0\}$, $m(0) = 8\pi$ となる [2, 6] が, $m(q) > 8\pi$ となる (非球対称な) 爆発解が存在するかどうかは長らく未解決であった. [4] では接合漸近展開法を用いて $S = \{0\}$, $m(0) = 16\pi$ となる爆発解を形式的に構成した. 一方 $\sharp S > 1$, 即ち, 複数個の爆発点を持つ爆発解の存在もこれまで知られていなかった. 本講演では $\Omega = \mathbb{R}^2$ のとき, **任意の自然数 n に対して, $\sharp S = n$ となる爆発解 (u_n, v_n) が存在すること**を示す [5]. 時間が許せば [4] の概要についても簡単に紹介する.

参考文献

- [1] T. Nagai, *Blowup of nonradial solutions to parabolic–elliptic systems modeling chemotaxis in two–dimensional domains*, J. Inequal. Appl. **6** (2001), 37–55.
- [2] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, *Singularity patterns in a chemotaxis model*, Math. Ann. **306** (1996), 583–623.
- [3] W. Jäger and S. Luckhaus, *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), 819–824.
- [4] Y. Seki, Y. Sugiyama, and J. J. L. Velázquez, *Multiple peak aggregations for the Keller–Segel system*, Nonlinearity, **26** (2013), 319–352.
- [5] Y. Seki, Y. Sugiyama, and J. J. L. Velázquez, in progress.
- [6] T. Senba, *Type II blowup of solutions to a simplified Keller–Segel system in two dimensional domains*, Nonlinear Anal. **66** (2007) 1817–1839.
- [7] T. Senba and T. Suzuki, *Chemotactic collapse in a parabolic–elliptic system of mathematical biology*, Adv. Differential Equations, **6** (2001), 21–50.