与えられた関数を平均曲率に持つ Euclid 空間内の一般化された回転超曲面の大域的存在について

長澤 壯之 (埼玉大学)

1　一般化された回転超曲面

Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の回転面の研究は、Delaunay [1] に始まる。$\mathbb{R}^n$ 内の一般化された回転超曲面とは、コンパクト Lie 群 G と $\mathbb{R}^n$ への余次元 2 の主軌道を持つ表現に対し、その主軌道の 1 径数族を指す ([3])。このような主軌道が存在する G は、以下の表のように、5 タイプ 14 種に分類されている。タイプ名を一般化された回転超曲面にも流用する。タイプ I の $n = 3$ の場合が、$\mathbb{R}^3$ 内の回転面である。

タイプ	J	ϕ_j	$(G, \mathbb{R}^n)$	n_j
I	$\{0\}$	0	$(O(n-1), \mathbb{R}^n)$	$n-2$
II	$\{0,1\}$	$\frac{j\pi}{2}$	$(O(\ell+1) \times O(m+1), \mathbb{R}^{\ell+m+2})$	$n_0 = m$ $n_1 = \ell$
III	$\{-1,0,1\}$	$\frac{j\pi}{3}$	$(SO(3), \mathbb{R}^5)$	1
			$(SU(3), \mathbb{R}^8)$	2
			$(Sp(3), \mathbb{R}^{14})$	4
			$(F_4, \mathbb{R}^{26})$	8
IV	$\{-1,0,1,2\}$	$\frac{j\pi}{4}$	$(SO(5), \mathbb{R}^{10})$	$n_0 = n_2 = 2$ $n_{\pm 1} = 2$
			$(U(5), \mathbb{R}^{20})$	$n_0 = n_2 = 5$ $n_{\pm 1} = 5$
			$(U(1) \times Spin(10), \mathbb{R}^{32})$	$n_0 = n_2 = 9$ $n_{\pm 1} = 6$
			$(SO(2) \times SO(m), \mathbb{R}^{2m})$	$n_0 = n_2 = m-2$ $n_{\pm 1} = 1$
			$(S(U(2) \times U(m)), \mathbb{R}^{4m})$	$n_0 = n_2 = 2m-3$ $n_{\pm 1} = 2$
			$(Sp(2) \times Sp(m), \mathbb{R}^{8m})$	$n_0 = n_2 = 4m-5$ $n_{\pm 1} = 4$
V	$\{-2,-1,0,1,2\}$	$\frac{j\pi}{6}$	$(SO(4), \mathbb{R}^8)$	1
			$(G_2, \mathbb{R}^{14})$	2

表 1: 余次元 2 の主軌道をもつ表現

2　与えられた関数を平均曲率に持つ一般化された回転超曲面

$H = H(s)$ を既知一変数関数とし、これを平均曲率に持つ $\mathbb{R}^n$ 内の一般化された回転超曲面の存在を考える。回転超曲面の弧長径数付けられた生成曲線を $(x(s), y(s))$ とし、H の定義域と生成曲線の定義域が一致するとき、回転超曲面が大域的に存在するという。これまでに、H が解析関数でタイプ I の場合は、Dorfmeister-Kenmotsu [2] によって肯定的に解決されている。ここでは、H に対する仮定は、連続性のみとし、すべてのタイプについて考察する。$\boldsymbol{x}(s) = (x(s), y(s))$, $\boldsymbol{e}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\boldsymbol{e}(\theta)^{\perp} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ とすると、$\boldsymbol{x}$ が満たすべき方程式は、

$$\boldsymbol{x}''(s)^{\perp} \cdot \boldsymbol{x}'(s) + \sum_{j \in J} \frac{n_j \boldsymbol{e}(\phi_j) \cdot \boldsymbol{x}'(s)}{\boldsymbol{e}(\phi_j)^{\perp} \cdot \boldsymbol{x}(s)} = (n-1)H(s), \quad \|\boldsymbol{x}'(s)\|_{\mathbb{R}^n} = 1, \tag{1}$$

となる。ここで、J, n_j, ϕ_j は、それぞれ考えている回転超曲面の種類から定まる添え字の有限集合、自然数、角度である (表 1)。n_j の総和は、$n-2$ であり、これは生成曲線の曲率以外の主曲率の個数を表す。

3　結果

方程式 (1) に対する初期値問題の局所解の存在と一意性は、標準的な方法で示される。この方程式は、$\boldsymbol{e}(\phi_j)^{\perp} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ となる点で特異になる。解が特異集合に触れなければ延長可能な事は容易に示される。解が特異点に到達した場合、特異点を超えて延長出来る事を示す必要がある。特異点に到達する場合の漸近挙動を調べ、それに応じた重み付きの関数空間を設定する事で、解が特異点に到達した後の延長可能性を示した。結果として、解は、特異集合に到達するかしないかに拘わらず、大域的に延長できる事が示された (タイプ I–II: 剱持 勝衛 (東北大学) との共同研究 [4], タイプ III-V: [5])。

定理 3.1 H を区間 $I(\subset \mathbb{R})$ 上で定義された連続関数、$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\|\boldsymbol{v}_0\|_{\mathbb{R}^2} = 1$, $s_0 \in I$ とする。このとき、$\boldsymbol{x}(s_0) = \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}'(s_0) = \boldsymbol{v}_0$ を満たす、方程式 (1) の解が区間 I 上で一意的に存在する。このとき、$\{\boldsymbol{x}(s) \,|\, s \in I\}$ を生成曲線とする一般化された回転超曲面の平均曲率は、H になる。

参考文献

[1] C. Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures Appl. Ser.1 **6** (1841), 309–320.

[2] J. Dorfmeister and K. Kenmotsu, *Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature*, Differential Geom. Appl. **27** (2009), 702–712.

[3] W.-Y. Hsiang, *Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces, I*, J. Differential Geom. **17** (2) (1982), 337–356.

[4] K. Kenmotsu & T. Nagasawa, *On the global existence of generalized rotational hypersurfaces with prescribed mean curvature in the Euclidean spaces, I*, submitted.

[5] T. Nagasawa, *On the global existence of generalized rotational hypersurfaces with prescribed mean curvature in the Euclidean spaces, II*, in preparation.