

A generalized Fourier transform and the Schrödinger operator with the inverse square potential

渡辺秀司

群馬大学 理工学研究院 数理科学教室

特異な変数係数をもつ $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素

$$\mathcal{D}_c = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{c}{x}R, \quad Ru(x) = u(-x), \quad c > -\frac{1}{2}$$

は量子力学における Wigner の交換関係に従う 1 次元調和振動子系に登場する. $p = -i\mathcal{D}$ とおく. このとき, Wigner の交換関係は以下の通り: $ip = [x, H]$ and $-ix = [p, H]$, ここで, ハミルトニアン H は $H = (p^2 + x^2)/2$. この作用素 $\mathcal{D}_c$ について:

(1) $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 $\mathcal{D}_c$ を $L^2(\mathbb{R})$ 上の掛け算作用素 y へ変換する積分変換 B_c を導入する. 定数 c が $c = 0$ のときは, 積分変換 B_c は Fourier 変換に一致するので, Fourier 変換の 1 つの一般化とみなせる.

(2) 次に, 積分変換 B_c を用いて Sobolev 型の空間を定義して, Sobolev 型の埋め込み定理を証明する. 定数 c が $c = 0$ のときは, この埋め込み定理は Sobolev の埋め込み定理を再現するので, Sobolev の埋め込み定理の 1 つの一般化とみなせる.

(3) このアイデアを多次元の場合へそのまま拡張して, 逆 2 乗ポテンシャルをもつ Schrödinger 作用素へ応用してその自己共役性を議論し, 他の手法による結果と比較する.

参考文献

- [1] N. Okazawa, *On the perturbation of linear operators in Banach and Hilbert spaces*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 677-701.
- [2] S. Watanabe, *An embedding theorem of Sobolev type for an operator with singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 839-848.
- [3] S. Watanabe, *The explicit solutions to the time-dependent Schrödinger equations with the singular potentials $k/(2x^2)$ and $k/(2x^2) + \omega^2 x^2/2$* , Commun. Partial Differential Equations **26** (2001), 571-593.
- [4] S. Watanabe, *The motion of a quantum mechanical particle under the inverse square potential*, Applicable Analysis **81** (2002), 607-613.