Boundedness in parabolic-elliptic Keller-Segel systems with signal-dependent sensitivity and growth term[1]

藤江健太郎 (東京理大・理 M2)

問題 次の初期値境界値問題 $(\mathrm{KS})_{\chi(v)}$ を考える:

$$(\mathrm{KS})_{\chi(v)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ 0 = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域であり, 初期値 u_0 は滑らかな非負関数とし, 感応性関数 χ は滑らかな正値関数とする. $(\mathrm{KS})_{\chi(v)}$ は集合体形成のプロセスを精密に記述した放物・楕円型の Keller-Segel 系である. 感応性関数 $\chi(v)$ のない単純化された Keller-Segel 系は広く研究されているが, $(\mathrm{KS})_{\chi(v)}$ は $\chi(v)$ を扱う困難さからほとんど研究されていない.

先行研究

- $\chi(v) = \dfrac{\chi_0}{v},\ \chi_0 < \dfrac{2}{N-2} \Longrightarrow (\mathrm{KS})_{\chi(v)}$ の球対称解は時間大域的に存在し, 解は有界 ([4]).
- $\chi(v) = \dfrac{\chi_0}{v},\ \chi_0 < \dfrac{2}{N} \Longrightarrow (\mathrm{KS})_{\chi(v)}$ の球対称でない時間大域的弱解が存在 ([1]).

未解決問題 次の問題が長い間, 未解決であった:

- $\chi(v) = \dfrac{\chi_0}{v}$ のときの球対称でない解は有界か？
- より一般の感応性関数 $\chi(v) = \dfrac{\chi_0}{v^k}$ $(k > 1)$ をもつときに解は有界か？
- $(\mathrm{KS})_{\chi(v)}$ に増殖項 $f(u)$ を加えたときに解は有界か？

主結果 上の未解決問題を全て解決した. 得られた結果を要約すると次の通りである:

- $\chi(v) = \dfrac{\chi_0}{v},\ \chi_0 < \dfrac{2}{N} \Longrightarrow (\mathrm{KS})_{\chi(v)}$ の球対称でない解は有界 ([2]).
- より一般の感応性関数 $\chi(v) \leq \dfrac{\chi_0}{v^k}$ $(k > 1)$ をもつとき, χ_0 が小さければ解は有界 ([2]).
- $(\mathrm{KS})_{\chi(v)}$ に増殖項 $f(u)$ を加えたときに, ある条件の下で解は有界 ([3]).

参考文献

[1] P. Biler, *Global solutions to some parabolic-elliptic systems of chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl. **9** (1999), 347–359.

[2] K. Fujie, M. Winkler, T. Yokota, *Boundedness of solutions to parabolic-elliptic Keller-Segel systems with signal-dependent sensitivity*, submitted.

[3] K. Fujie, T. Yokota, *Boundedness of solutions to parabolic-elliptic chemotaxis-growth systems with signal-dependent sensitivity*, Math. Bohem., to appear.

[4] T. Nagai, T. Senba, *Global existence and blow-up of radial solutions to a parabolic-elliptic system of chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998), 145–156.

---

[1]本講演は Michael Winkler 氏 (Univ. Paderborn) と横田 智巳氏 (東京理大理) との共同研究に基づく.