# 変数係数波動方程式と Kirchhoff 方程式の大域可解性

廣澤　史彦（山口大学・理）[1]

本講演では, 時間に依存する係数を持つ波動方程式の初期値問題の解の評価と, それを応用した次の Kirchhoff 方程式の初期値問題の大域可解性に関する結果を紹介する:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(t,x)|^2 \, dx\right) \Delta u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Kirchhoff 方程式の大域可解性は, 初期値の小ささを仮定しない場合, 実解析関数のクラスにおける大域可解性 [1], 準解析関数のクラスにおける大域可解性 [5] が知られているが, Sobolev 空間や Gevrey class における大域可解性は, 長年にわたる未解決問題である. 一方, 大域解の非存在性に関する結果も知られていない. このような背景のもと,「大域可解性が成り立つクラスを解析関数のクラスからどれくらい広げることができるか」という問題は, Kirchhoff 方程式研究の主要な研究課題となっている.

[2, 4] では, Kirchhoff 方程式の大域可解性が保障される初期値のクラスとして, Sobolev 空間や Gevrey class の枠組では記述できない次のようなクラスが導入された:

**Definition 1** ($B_\Delta^{(m)}$ (Manfrin's class))**.** $m \in \mathbb{N}$, $\rho \ge 1$, $\eta > 0$, $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$G_m(f;\rho,\eta) := \int_{|\xi|\ge\rho} \left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^m \exp\left(\eta|\xi| \left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{-m}\right) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi, \tag{2}$$

$\mathcal{L} := \{\{\rho\}_{j=1}^\infty \,;\, \rho_j \ge 1,\ \rho_j \nearrow \infty\}$ とする. このとき $B_\Delta^{(m)}$ を次で定義する:

$$B_\Delta^{(m)} := \bigcup_{\eta>0} \left\{ f(x) \,;\, \exists\{\rho_j\} \in \mathcal{L},\ \sup_{j\ge1} \{G_m(f;\rho_j,\eta)\} < \infty \right\}.$$

このとき (1) の大域可解性に関する次の結果が成り立つ:

**Theorem 1** ([2, 4])**.** *$\nabla u_0, u_1 \in B_\Delta^{(m)}$ ならば (1) の大域解が存在し, 任意の $t \in (0,\infty)$ に対して次が成り立つ:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^m \left(|\xi|^2 |\hat{u}(t,\xi)|^2 + |\partial_t \hat{u}(t,\xi)|^2\right) d\xi < \infty.$$

Remark 1. $m \ge 2$ ならば, $B_\Delta^{(m)}$ に対して次が成り立つ:

$$B_\Delta^{(m)} \subset H^{\frac{m}{2}}, \quad B_\Delta^{(m)} \not\subset H^{\frac{m}{2}+\varepsilon} \ \ (\forall\varepsilon > 0), \quad B_\Delta^{(m+1)} \not\subset B_\Delta^{(m)}.$$

[1] 〒 753-8512 山口市吉田 1677-1 山口大学理学部数理科学科
e-mail: hirosawa@yamaguchi-u.ac.jp

ここで, $[0,\infty)$ 上で非負の狭義単調増加関数 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ に対して, (2) で定めた $G_m(f;\rho,\eta)$ を次のように一般化する:

$$G(f;\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\rho,\eta) := \int_{|\xi|\ge\rho} \mathfrak{M}_1\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right) \exp\left(\frac{\eta|\xi|}{\mathfrak{M}_2\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)}\right) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \, d\xi.$$

このとき, 特に $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ 増大オーダーが多項式よりも大きい場合に Theorem 1 を拡張する問題を考える.

Remark 2. Theorem 1 の証明は, 線形の変数係数波動方程式:

$$\partial_t^2 w(t,x) - a(t)^2 \Delta w(t,x) = 0, \ \ a(t) \ge 1, \ \ a(t) \in \mathscr{B}^m([0,\infty)) \tag{3}$$

に対する $(t,\xi)$ 空間における $m$ に依存した解の評価が本質的であったが, 今回の問題では [3] で導出した ultradifferentiable class の係数を持つ線形問題 (3) の解の評価を用いることになる.

**Definition 2** ($B_\Delta\{M_k\}$)**.** $\{M_k\}_{k=0}^\infty$ は対数凸性: $\frac{M_k}{kM_{k-1}} \le \frac{M_{k+1}}{(k+1)M_k}$ を満たす正の発散数列, $\mathfrak{M}(r)$ と $\widetilde{\mathfrak{M}}(r)$ は, それぞれ次で定義される $\{M_k\}$ と $\{k!M_k\}$ に対する随伴関数とする:

$$\mathfrak{M}(r) := \sup_{k\ge1}\left\{\frac{r^k}{M_k}\right\}, \quad \widetilde{\mathfrak{M}}(r) := \sup_{k\ge1}\left\{\frac{r^k}{k!M_k}\right\}.$$

ここで $B_\Delta\{M_k\}$ を次のように定める:

$$B_\Delta\{M_k\} := \bigcup_{\eta>0}\left\{f(x)\,;\,\exists\{\rho_j\}\in\mathcal{L}, \ \sup_{j\ge1}\left\{G_m(f;\mathfrak{M},\widetilde{\mathfrak{M}},\rho_j,\eta)\right\} < \infty\right\}.$$

ことのとき, (1) の大域可解性に関する次の定理が成り立つ:

**Theorem 2.** *$\nabla u_0, u_1 \in B_\Delta\{M_k\}$ ならば (1) の大域解が存在し, 任意の $t\in(0,\infty)$ に対して次が成り立つ:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{M}(|\xi|)\left(|\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 + |\partial_t\hat{u}(t,\xi)|^2\right) \, d\xi < \infty.$$

Example 1. $M_k = k!^s$, $s>1$ の場合, $\mathfrak{M}(r) \approx \exp(r^{1/s})$, $\widetilde{\mathfrak{M}}(r) \approx \exp(r^{1/(s+1)})$ となる.

# References


[1] S. Bernstein, Sur une class d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles, *Izvestia. Akad. Nauk SSSR* **4** (1940) 17–26.

[2] F. Hirosawa, Global solvability for Kirchhoff equation in special classes of non-analytic functions. *J. Differential Equations* **230** (2006), 49–70.

[3] F. Hirosawa and H. Ishida, On second order weakly hyperbolic equations and the ultradifferentiable classes. *J. Differential Equations* **255** (2013), 1437–1468.

[4] R. Manfrin, On the global solvability of Kirchhoff equation for non-analytic initial data, *J. Differential Equations* **211** (2005), 38–60.

[5] K. Nishihara, On a global solution of some quasilinear hyperbolic equation, *Tokyo J. Math.* **7** (1984), 437–459.