

# Kirchhoff 型方程式に対する特異摂動問題\*

生駒 典久 (東北大学)

本講演では、以下の Kirchhoff 型方程式に対する特異摂動問題について考える:

$$(E) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 m(\varepsilon^{2-N} \|\nabla u\|_{L^2}^2) \Delta u + V(x)u = f(u) & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbf{R}^N), \quad u > 0 & \text{in } \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

ただし  $N \geq 1$ ,  $m \in C([0, \infty), \mathbf{R})$ ,  $V \in C(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ ,  $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  は与えられた関数,  $\|\nabla u\|_{L^2}^2 := \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dx$  とし,  $0 < \varepsilon \ll 1$  はパラメータとする. 方程式 (E) の特徴としては, 項  $m(\varepsilon^{2-N} \|\nabla u\|_{L^2}^2)$  による非局所効果が挙げられる. また, 関数  $m(s)$  が正定数と恒等的に等しい場合 ( $m(s) \equiv \text{const.} > 0$ ), 方程式 (E) は非線形 Schrödinger 方程式に対する特異摂動問題となる. このような意味で方程式 (E) は非線形 Schrödinger 方程式を含むようなものである.

先行研究では以下の場合が良く取り扱われている:

$$N = 3, m(s) = a + bs \ (a, b > 0), f(s) \sim |s|^{p-1}s, \ 3 < p < 5 \ ([8]), \\ \text{または } f(s) \sim \lambda |s|^{p-1} + s^5, \ 3 < p < 5 \ ([7, 9]).$$

[7, 8, 9] では, 関数  $V(x)$  の最小点 ([8, 9]) や極小点 ([7]) に凝集する (E) の解の存在が示されている.

本講演の目的は非線形項  $f$  として [1, 2] において扱われているような非常に一般的なものに対して (E) の凝集解が存在するかを考察することである. 特に, 関数  $V(x)$  の極小点に凝集する解に興味がある. さらに, 関数  $m(s)$  が 1 次関数以外の場合も扱い, 次元についても 3 次元に限定せず, 一般の次元において考察する.

まず, 関数  $V(x)$  に関する仮定を述べる:

$$(V1) \ V \in C(\mathbf{R}^N), \underline{V} := \inf_{\mathbf{R}^N} V > 0.$$

$$(V2) \ \text{有界開集合 } \Omega \subset \mathbf{R}^N \text{ が存在して}$$

$$V_0 := \inf_{\Omega} V < \inf_{\partial\Omega} V$$

が成立する. また  $\mathcal{M} := \{x \in \Omega \mid V(x) = V_0\}$  とおく.

この仮定より  $V|_{\Omega}$  が  $\Omega$  内で最小点を持つことが分かり ( $\mathbf{R}^N$  上で考えれば極小点),  $\mathcal{M}$  は  $\Omega$  内の最小点全体の集合である.

次に非線形項  $f$  の条件について述べる.

$$(f1) \ f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \ f(0) = 0.$$

$$(f2) \ -\infty < \liminf_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} \leq \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} < \underline{V}.$$

---

\* 本講演は Universidade Federal do Pará 所属の G. M. Figueiredo 氏と J. R. Santos Júnior 氏との共同研究に基づく.

(f3)  $|s| \rightarrow \infty$  としたとき,  $N \geq 3$  ならば  $f(s)/|s|^{2^*-1} \rightarrow 0$ ,  $N = 2$  のときは,  $f(s)/e^{\alpha s^2} \rightarrow 0$  が任意の  $\alpha > 0$  に対して成り立つ. ただし  $2^* = 2N/(N-2)$  とする.

(f4) ある  $s_0 > 0$  が存在して次を満たす:  $N \geq 2$  ならば

$$-\frac{V_0}{2}s_0^2 + F(s_0) > 0. \quad \text{ただし } F(s) := \int_0^s f(t)dt.$$

$N = 1$  のときは

$$-\frac{V_0}{2}s_0^2 + F(s_0) = 0 > \frac{V_0}{2}s^2 + F(s), \quad -V_0s + f(s_0) > 0$$

が全ての  $s \in (0, s_0)$  について成立する.

先行研究では取り扱えず, (f1)–(f4) を満たす例としては  $f(s) = |s|^{p-1}s$  ( $1 < p \leq 3$ ) が挙げられる.

最後に関数  $m(s)$  の仮定について述べる. 以下の条件 (m1)–(m5) の内,  $N = 1, 2$  ならば (m1) のみを,  $N \geq 3$  のときは (m1)–(m5) を仮定する:

- (m1) ある  $m_0 > 0$  が存在し,  $m(s) \geq m_0 > 0$  が任意の  $s \in [0, \infty)$  について成立する.
- (m2)  $M(s) := \int_0^s m(t)dt$  とおく. このとき,  $\liminf_{s \rightarrow \infty} \{M(s) - (1 - 2/N)m(s)s\} = \infty$ .
- (m3)  $s \rightarrow \infty$  としたとき,  $s^{-2/(N-2)}m(s) \rightarrow 0$ .
- (m4)  $m(s)$  は  $[0, \infty)$  上, 単調非減少.
- (m5) 関数  $s \mapsto s^{-2/(N-2)}m(s)$  は  $(0, \infty)$  上, 単調非増加.

上の条件を全て満たす例としては次のものが挙げられる:

$$m(s) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i s^{q_i}, \quad 0 < a_0, \quad 0 \leq a_i \ (1 \leq i \leq k), \quad 0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_k < \frac{2}{(N-2)_+}.$$

特に  $1 \leq N \leq 3$  とすると  $m(s) = a + bs$  は (m1)–(m5) を満たす.

次が本講演の主定理である:

**Theorem 0.1** ([6]).  $N \geq 1$  とし, 条件 (V1)–(V2) と (f1)–(f4) を仮定する. また,  $N = 1, 2$  のときは (m1) を,  $N \geq 3$  のときは (m1)–(m5) を仮定する. このとき, ある  $\varepsilon_0 > 0$  と (E) の解  $(u_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$  が存在して次が成立する:  $(x_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$  を  $u_\varepsilon$  の最大点とすると

- (i)  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたとき,  $\text{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{M}) \rightarrow 0$ .
- (ii) 部分列  $(\varepsilon_n)$  が存在し,  $x_{\varepsilon_n} \rightarrow x_0$  かつ  $H^1(\mathbf{R}^N)$  の強位相において  $u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n x + x_{\varepsilon_n}) \rightarrow U_0$  が成立する. ここで  $U_0(x)$  は次の定数係数 Kirchhoff 型方程式の正値解:

$$(1) \quad -m(\|\nabla v\|_{L^2}^2)\Delta v + V(x_0)v = f(v) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^N).$$

証明は, [3, 4, 5] の議論に沿って行う. そのために, 定数係数 Kirchhoff 型方程式 (1) の最小エネルギー解を峠の定理により特徴付ける. その際にどのような条件を  $m(s)$  に課せば良いかを考察する. この特徴付けを用いて Theorem 0.1 の証明を行うが, 項  $m(\|\varepsilon^{2-N}\nabla u\|_{L^2}^2)$  による非局所効果に注意して議論を行わなければならない.

## 参考文献

- [1] H. Berestycki and P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), no. 4, 313–345.

- [2] H. Berestycki and P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), no. 4, 347–375.
- [3] J. Byeon and L. Jeanjean, Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **185** (2007), no. 2, 185–200.
- [4] J. Byeon and L. Jeanjean, Erratum: "Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity" [*Arch. Ration. Mech. Anal.* **185** (2007), no. 2, 185–200]. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **190** (2008), no. 3, 549–551.
- [5] J. Byeon, L. Jeanjean and K. Tanaka, Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity: one and two dimensional cases. *Comm. Partial Differential Equations* **33** (2008), no. 4-6, 1113–1136.
- [6] G.M. Figueiredo, N. Ikoma and J.R. Santos Júnior, Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **213** (2014), no. 3, 931–979.
- [7] Y. He, G. Li and S. Peng, Concentrating bound states for Kirchhoff type problems in  $\mathbb{R}^3$  involving critical Sobolev exponents. *Adv. Nonlinear Stud.* **14** (2014), no. 2, 483–510.
- [8] X. He and W. Zou, Existence and concentration behavior of positive solutions for a Kirchhoff equation in  $\mathbb{R}^3$ . *J. Differential Equations* **252** (2012), no. 2, 1813–1834.
- [9] J. Wang, L. Tian, J. Xu and F. Zhang, Multiplicity and concentration of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth. *J. Differential Equations* **253** (2012), no. 7, 2314–2351.