Scattering problems on the Schrödinger equation for a repulsive Hamiltonian

石田　敦英（追手門学院大学）[†]

次のような Hamiltonian の支配する量子力学系の下での散乱問題を考える．

$$H_0 = p^2 - x^2, \quad H = H_0 + V. \tag{1}$$

ここで，$p = -i\nabla_x$ は運動量，$x \in \mathbb{R}^n$ は粒子の位置，V は粒子に働く相互作用ポテンシャルである．なお，$x^2 = |x|^2$ とした．この系は，粒子が時間に関して指数関数的に遠方に飛び去るという著しい特徴を持ち，このことはポテンシャル V の減衰がきわめて緩やかであっても散乱の可能性を示唆している．本講演では，V の遠方での条件に応じて，波動作用素の存在や非存在，また逆散乱問題について議論したい．本予稿では逆問題での V の仮定と，得られた主張について述べておく．

Assumption 1. $V = V^{\mathrm{sing}} + V^{\mathrm{reg}}$ と和に分解され，$V^{\mathrm{sing}} \in \mathscr{V}^{\mathrm{sing}}$ は $\mathbb{R}^n$ においてコンパクトな台を持ち，$V^{\mathrm{sing}} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ をみたすものとする．ここで，

$$q > \begin{cases} 2 & \text{if} \quad n \leqslant 4 \\ n/2 & \text{if} \quad n \geqslant 5 \end{cases} \tag{2}$$

である．一方，$V^{\mathrm{reg}} \in \mathscr{V}^{\mathrm{reg}}$ は $C^1(\mathbb{R}^n)$ に属し，$\epsilon > 0$ 対して次の空間遠方での減衰を持つ．

$$|\partial_x^\beta V^{\mathrm{reg}}(x)| \leqslant C_\beta \langle x \rangle^{-\epsilon - |\beta|}, \quad |\beta| \leqslant 1, \quad \langle x \rangle = (1 + x^2)^{1/2}. \tag{3}$$

以上の仮定の下，H_0，H はいずれも $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の自己共役作用素となり，強連続ユニタリー群を用いて，波動作用素

$$W^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} \tag{4}$$

の存在が示される（例えば Korotyaev [2] または Bony-Carles- Häfner-Michel [1]）．そして散乱作用素 $S = S(V)$ は

$$S = (W^+)^* W^- \tag{5}$$

によって定められる．

Theorem 1. 空間次元 $n \geqslant 2$ とする．$V_1, V_2 \in \mathscr{V}^{\mathrm{sing}} + \mathscr{V}^{\mathrm{reg}}$ のとき $S(V_1) = S(V_2)$ ならば $V_1 = V_2$ が成り立つ．

本結果は先行研究である次の Nicoleau [3] の改良となっている．

[†] 〒 567-8502 大阪府茨木市西安威 2-1-15 追手門学院大学経済学部経済学科
e-mail: a-ishida@res.otemon.ac.jp

Theorem 2. (Nicoleau [3]) 空間次元 $n \geqslant 3$ とする．$V_1, V_2 \in \tilde{\mathscr{V}}^{\mathrm{reg}}$ のとき $S(V_1) = S(V_2)$ ならば $V_1 = V_2$ が成り立つ．ここで $V \in \tilde{\mathscr{V}}^{\mathrm{reg}}$ は，$V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ で

$$|\partial_x^\beta V(x)| \leqslant C_\beta \langle x \rangle^{-1/2-\epsilon-|\beta|}, \quad \epsilon > 0 \tag{6}$$

の減衰を持つものである．

References

[1] Bony, J. F., Carles, R., Häfner, D. and Michel, L. Scattering theory for the Schrödinger equation with repulsive potential, *J. Math, Pures Appl.* **84**, 509-579 (2005).

[2] Korotyaev, E. L., On scattering in an exterior homogeneous and time-periodic magnetic field, *Mat. Sb.* **180**, 491-512 in Russian (1989).

[3] Nicoleau, F., Inverse scattering for a Schrödinger operator with a repulsive potential, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **22**, 1485-1492 (2006).