

臨界型 Burgers 方程式の時間大域解と漸近挙動について

岩淵 司 (中央大学 理工学部)

本講演では次の Burgers 方程式の初期値問題を考える.

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^n u \partial_{x_j} u + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = 0 & \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ただし, n は空間次元を表す自然数, $\alpha > 0$ とする. ここでは $\alpha = 1$ の場合を考察し, 小さい初期値に対する時間大域解の一意的存在と, 時刻無限大においてその解は Poisson 核に漸近することを示す.

初期値問題 (P) の研究は数多くなされており, $\alpha = 1$ が時間大域的適切性を得るための臨界値であることが知られている. Kiselev-Nazarov-Shterenberg [4] は空間 1 次元で周期的な場合を取り扱い, $\alpha < 1$ ならば $H^s(\mathbb{S}^1)$ ($s \geq 3/2 - \alpha$) 有限時間で爆発する解が存在し, 一方で $\alpha \geq 1$ ならば $H^s(\mathbb{S}^1)$ ($s \geq 3/2 - \alpha$) において任意の初期値に対して解が時間大域的に存在することを示した. Dong-Du-Li [2] は周期的な場合と全空間の場合を考察して $\alpha = 1$ ならば $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^1)$ および $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ において, $\alpha > 1$ ならば $L^{\frac{1}{\alpha-1}}(\mathbb{S}^1)$ および $L^{\frac{1}{\alpha-1}}(\mathbb{R})$ において任意の初期値に対して解が時間大域的に存在することを示した. Miao-Wu [5] は $\alpha = 1$ の場合を取り扱い, Besov 空間 $\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) に属する任意の初期値に対して時間大域解が存在することを示した. ここで $\alpha = 1$ としたときの尺度不変性が成り立つ関数空間を述べる. $\alpha = 1$ の場合, 方程式 (P) の解 u に対してスケール変換 $u_\lambda(t, x) = u(\lambda t, \lambda x)$ ($\lambda > 0$) を考えるとこの変換は方程式を不変に保ち, $\lambda > 0$ に関するノルム不変性:

$$\|u_\lambda(0, \cdot)\|_{L^\infty} = \|u(0, \cdot)\|_{L^\infty} \quad \text{for any } \lambda > 0$$

が成り立つ. Sobolev 空間 $\dot{H}_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, Besov 空間 $\dot{B}_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R})$ においても同様の性質が成り立つ. 本講演では $\alpha = 1$ の場合の初期値問題 (P) を考察し, $\dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)$ において小さい初期値に対する時間大域解の適切性を示す.

漸近挙動の研究に関して, Biler-Karch-Woyczynski は空間 1 次元の場合に以下の方程式; $c_0, c_1 > 0, 0 < \alpha < 2$ として

$$\partial_t u + (c_0 \partial_x^2 + c_1 (-\partial_x^2)^{\frac{\alpha}{2}}) u + u \partial_x u = 0,$$

を考察し, 初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対する時間大域解が次を満たすことを示した. $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$\|u(t) - e^{tA} u_0\|_{L^p} \leq C \begin{cases} t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{p})-\frac{2}{\alpha}+1} & 1 < \alpha < 2, \\ t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{p})-1} \log(2+t) & \alpha = 1, \\ t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{\alpha}} & 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

ただし, e^{tA} は $A := c_0 \partial_x^2 + c_1 (-\partial_x^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ で生成される発展作用素である. 本講演では $\alpha = 1$ の場合の初期値問題 (P) について初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)$ に対する時間大域解が Poisson 核:

$$P_t(x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|}](x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{t^n \pi^{\frac{n+1}{2}} (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

に近づくことを示す. ここで Γ は Gamma 関数である. また主定理では, 積分方程式;

$$(IP) \quad u(t) = P_t * u_0 - \int_0^t P_{t-\tau} * \left(\sum_{j=1}^n u \partial_{x_j} u \right) d\tau$$

を満たす解 u を考える.

主定理. $n \geq 1, \alpha = 1$ とすると, $\delta > 0$ が存在して次が成立する. $\|u_0\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0} \leq \delta$ を満たす任意の初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)$ に対して (IP) の時間大域解 u が空間 $C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^n)) \cap C([0, \infty), \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)) \cap L^1(0, \infty; \dot{B}_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^n))$ において一意的存在する. $1 \leq p \leq \infty$ とすると解 u は次を満たす.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{n(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - MP_t\|_{L^p} = 0,$$

ただし, $M := \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) dy$. 更に $|\cdot| u(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば次が成り立つ.

$$(1) \quad \|u(t) - MP_t\|_{L^p} \leq \begin{cases} Ct^{-(1-\frac{1}{p})-1} \log(e+t) & \text{if } n = 1, \\ Ct^{-n(1-\frac{1}{p})-1} & \text{if } n \geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} t^{n(1-\frac{1}{p})+1} \left\| u(t) - MP_t + \nabla P_t \cdot \int_{\mathbb{R}^n} y u_0(y) dy \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} P_t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} u(\tau, y)^2 dy d\tau + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_0^t (\partial_{x_j} P_{t-\tau}) * (MP_{\tau+1})^2 d\tau \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} P_t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (MP_{\tau+1}(y))^2 dy d\tau \right\|_{L^p} = 0. \end{aligned}$$

注意. 主定理の解の一意性は $C([0, \infty), \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)) \cap L^1(0, \infty; \dot{B}_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^n))$ において成立する.

注意. (1) について, $n = 1$ の場合には $\log(e+t)$ を取り除くことはできない. 実際,

$$\|u(t) - MP_t\|_{L^2} \geq cM^2 t^{-\frac{3}{2}} \log(e+t) \quad \text{for large } t > 0$$

を示すことができる.

REFERENCES

- [1] P. Biler, G. Karch, W. A. Woyczynski, *Asymptotics for multifractal conservation laws*, Studia Math. **135** (1999), no. 3, 231–252.
- [2] H. Dong, D. Du, D. Li, *Finite time singularities and global well-posedness for fractal Burgers equations*, Indiana Univ. Math. J. **58** (2009), no. 2, 807–821.
- [3] G. Karch, C. Miao, X. Xu, *On convergence of solutions of fractal Burgers equation toward rarefaction waves*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2008), no. 5, 1536–1549.
- [4] A. Kiselev, F. Nazarov, R. Shterenberg, *Blow up and regularity for fractal Burgers equation*, Dyn. Partial Differ. Equ. **5** (2008), no. 3, 211–240.
- [5] C. Miao, G. Wu, *Global well-posedness of the critical Burgers equation in critical Besov spaces*, J. Differential Equations **247** (2009), no. 6, 1673–1693.